CURRICULUM DELL'ATTIVITÀ SCIENTIFICA E DIDATTICA

DI CAMILLO COSTANTINI.

Ho conseguito la Laurea in Matematica presso l'Università degli Studi di Pisa nel luglio 1989; la Tesi di Laurea, intitolata: "Metriche a valori in gruppi abeliani totalmente ordinati e ν-$*$-sviluppi di spazi topologici", ho avuto come relatore il prof. Sandro Levi.

Successivamente ho concorso in diverse università italiane, per l'ammissione al Dottorato di Ricerca in Matematica per l'anno accademico 1990/91 (VI ciclo). Essendo risultato vincitore nelle Università di Torino (1^o classificato su 10 posti disponibili), Milano (2^o su 11 posti) e Bologna, ho scelto la sede di Milano, dove ho frequentato regolarmente i relativi corsi ed ho svolto nell'arco dei quattro anni attività di ricerca, ancora sotto la direzione del prof. Levi.

Durante tale periodo, il mio spiccato interesse per la topologia generale si è indirizzato in particolare verso la teoria degli iperspazi. La Tesi di Dottorato, "Convergenze e topologie sugli iperspazi", consiste essenzialmente di una illustrazione introduttiva sulle problematiche generali di tale teoria, e di una esposizione dei risultati raggiunti nei tre articoli: "Metrics that generate the same hyperspace convergence", "Infima of hyperspace topologies" e "On the infimum of the Hausdorff metric topologies" (vedi pag. 4 e 5). Ho sostenuto il relativo esame finale per il conseguimento del titolo a Roma, nel gennaio 1996, con esito positivo.

In precedenza, dopo la scadenza della borsa di studio del dottorato, avevo ottenuto una Borsa di Ricerca INdAM per l'anno accademico 1994–95, di cui ho fruito dal dicembre 1994 al luglio 1995. Poi, nel marzo del 1995, sono risultato vincitore di un concorso per un posto di Ricercatore in Analisi Matematica (raggruppamento A02A, attualmente MAT05) presso l'Università degli studi di Torino, dove sono entrato in servizio l'1-8-1995 (rinunciando perciò da quel momento alla Borsa INdAM), e dove sono attualmente in carica.

Avendo anche vinto, in precedenza, una Borsa di studio CNR-NATO advanced per laureati, della durata di 11 mesi, ho presentato al Consiglio di Facoltà una richiesta di congedo, che mi è stata accordata per un periodo di 6 mesi, dall'1-9-1995 al 29-2-1996. Durante tale periodo sono stato ospite del Dipartimento di Matematica dell'Università di York (Canada), dove ho svolto attività di ricerca in collaborazione con il prof. Stephen Watson. L'argomento principale di cui mi sono occupato in tale periodo consiste in un noto tema della teoria degli iperspazi, quello degli spazi *consonanti* e *dissonanti*.

Al ritorno dal Canada, ho inziato la mia attività didattica presso l'Università di Torino, svolgendo da marzo a giugno '96 il programma di esercitazioni relativo a due corsi di Analisi I per il Corso di Laurea in Informatica, tenuti rispettivamente dal dott. D. Delbosco e dal prof. P. Colli. Successivamente, ho continuato a tenere con regolarità corsi di esercitazione o di tutorato di Analisi I, presso i Dipartimenti di Matematica, Informatica o Fisica. Inoltre, a partire dall'Anno Accademico 2004/05, ho tenuto ogni anno, presso il Dipartimento di Scienza e Tecnologia per i Beni Culturali, il modulo di Matematica Applicata relativo al corso di Abilità Informatiche e Matematica Applicata.

Per quanto riguarda corsi facoltativi attinenti a specifici indirizzi per il Corso di Laurea in Matematica, durante l'Anno Accademico 1999/2000 ho tenuto un modulo del corso di Topologia (l'altro modulo è stato tenuto dal prof. Gandini). Inoltre, durante gli Anni Accademici 2003/04 e 2004/05 ho tenuto in collaborazione con il prof. P. Caldiroli un corso di Teoria delle Funzioni di Variabile reale e Applicazioni, centrato essenzialmente sulla teoria dell'integrazione di Lebesgue, il Lemma di Vitali e le sue applicazioni, e le proprietà delle funzioni assolutamente continue.

Essendo trascorsi, al termine del mese di luglio 1998, i miei primi tre anni di servizio come Ricercatore presso l'Università degli Studi di Torino, ho presentato domanda di conferma all'apposita Commissione; ho successivamente ottenuto la conferma in ruolo come Ricercatore nel mese di dicembre 1998.

Tesi, articoli e argomenti di ricerca.

La mia tesi di laurea, che rientra nell'ambito della topologia generale, tratta essenzialmente di un'estensione del concetto di spazio metrico. Precisamente, il principale oggetto di studio sono metriche generalizzate che prendono i valori, anziché sulla retta reale, su qualche gruppo abeliano totalmente ordinato. I risultati raggiunti sono in buona parte originali, anche se finora non ho avuto il tempo di riorganizzarli e pubblicarli in un articolo.

Nella prima parte del lavoro, mi occupo di stabilire alcuni teoremi di metrizzabilità in questo senso ampliato. Le tecniche impiegate nelle dimostrazioni fanno un uso essenziale di strumenti di aritmetica transfinita, e permettono di porre in evidenza le differenze esistenti tra il caso in cui il *carattere* del gruppo sul quale prendono i valori le metriche è $\aleph_0$, e quello in cui esso è strettamente maggiore di $\aleph_0$. Questi argomenti vengono poi approfonditi e sviluppati nel corso del 4^o capitolo.

Nel terzo capitolo, invece, vengono affrontati i problemi relativi alla completezza degli spazi *ν-metrici*, cioè spazi metrici nel senso generalizzato sopra descritto, in cui la funzione distanza prende i valori sul gruppo abeliano totalmente ordinato $\mathbf{R}^\nu$ (dove ν è un cardinale regolare), e che rivestono per ragioni di carattere strutturale un'importanza cruciale. Dopo aver introdotto un'opportuna defnizione di spazio ν-metrico completo (tramite una naturale generalizzazione delle successioni di Cauchy), si dimostra, in stretto parallelismo con il risultato di Frolík relativo agli spazi metrici classici (ma utilizzando tecniche talvolta assai differenti), che nel caso in cui il cardinale ν non sia *debolmente inaccessibile*, uno spazio ν-metrizzabile ammette una ν-metrica completa se e solo se esso risulta essere intersezione di un numero di aperti minore-uguale di ν all'interno della propria compattificazione di Stone-Čech. Tale risultato sembra non essere presente a tutt'oggi nella letteratura specialistica, pur essendo il concetto di spazio ν-metrizzabile (o *ω_ν-metrizzabile*, come viene spesso denotato) ben conosciuto e studiato nell'ambito della topologia generale.

Fra i problemi rimasti aperti all'interno della tesi, ve ne sono alcuni di cui sto continuando ad interessarmi attualmente. Uno di questi, collegato alla teoria degli spazi 0-dimensionali e fortemente 0-dimensionali, consiste nell'analizzare le caratteristiche degli spazi topologici che ammettono una metrica (compatibile con la topologia) a valori sull'insieme $\mathbf{Q}$ dei numeri razionali (vedi alle pag. 334–337 della tesi). Un'altra direzione di ricerca riguarda la possibilità di costruire metriche che prendano i valori in gruppi abeliani parzialmente ordinati (anziché totalmente ordinati). Questo tipo di metriche potrebbero rivelarsi di un certo interesse per l'analisi funzionale in quanto, contrariamente a quelle studiate nella tesi (vedi l'Appendice 1 al 2^o capitolo), permetterebbero di costruire delle "distanze" (anche qui, compatibili con la topologia) su spazi vettoriali topologici non metrizzabili in senso classico.

$\star \quad \star \quad \star$

Come ho già avuto modo di segnalare in precedenza, durante il periodo in cui ho effettuato il dottorato di ricerca a Milano i miei interessi si sono rivolti principalmente verso la teoria degli iperspazi. Dato uno spazio topologico X, viene detto *iperspazio* di X la collezione di tutti i suoi sottinsiemi chiusi (o chiusi non vuoti). Su tale oggetto è possibile introdurre varie topologie, che siano legate in qualche modo alla topologia originaria di X, e che permettano eventualmente di rispecchiarne alcune proprietà (in maniera di volta in volta da precisare). Fra le topologie più note, sono da segnalare la topologia di Vietoris e quella di Fell, e inoltre la convergenza di Kuratowski (che risulta essere una topologia se e solo se lo spazio base è localmente compatto).

Nel caso in cui lo spazio base X sia metrico (o addirittura normato), le possibilità di definire topologie interessanti e significative sull'iperspazio di X aumentano notevolmente (fra le più importanti, vanno ricordate la topologia di Hausdorff, quella di Wijsman, e quella di Attouch-Wets detta anche "bounded-Hausdorff"). È da notare che in genere le topologie così ottenute dipendono strettamente dalla metrica iniziale scelta, nel senso che metriche equivalenti sullo spazio base danno luogo in generale a topologie diverse sull'iperspazio.

Questa teoria è a tutt'oggi straordinariamente ricca di problematiche e questioni aperte: allo studio delle proprietà topologiche degli iperspazi, si aggiungono le tematiche riguardanti il confronto fra le varie topologie che possono esservi introdotte, e il loro comportamento in relazione alle operazioni reticolari di estremo superiore ed inferiore. Un'opera fondamentale di riferimento, in cui trovare definizioni e risultati basilari, nonché indicazioni sulle numerose applicazioni della teoria degli iperspazi al calcolo delle variazioni e all'analisi convessa, è il testo di Gerald Beer [8].

Illustrerò qui di seguito i miei articoli che possono essere riferiti sostanzialmente alla tematica generale della teoria degli iperspazi.

L'articolo "Metrics that generate the same hyperspace convergence" (C. Costantini, S. Levi, J. Zieminska: Set-Valued Analysis, vol. **1**, 1993, pag. 141–157) affronta il problema (all'epoca aperto da vari anni) di stabilire delle condizioni sufficienti e necessarie affinché due metriche equivalenti su un insieme X generino la stessa topologia di Wijsman sull'iperspazio di X. La caratterizzazione che viene fornita (Teoremi 5 e 5') è di tipo geometrico, e utilizza il concetto appositamente introdotto di *d-inclusione stretta*; nell'articolo vengono quindi presentate una serie di applicazioni del risultato in questione allo studio dell'iperspazio di uno spazio normato, e delle proprietà reticolari delle topologie di Wijsman sull'iperspazio di uno spazio metrizzabile.

Il risultato sopra descritto è citato nel già menzionato testo di Beer [8], come Teorema 2.1.10 (vedi anche la precedente Definizione 2.1.8 e l'Esempio 2.1.9).

L'articolo "On the Novak number of a hyperspace" (A. Bella, C. Costantini: Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, vol. **33**, 1992, pag. 695–698) analizza il comportamento del numero di Novak (= minima cardinalità che può avere un ricoprimento di uno spazio topologico composto di insiemi rari) nel passaggio da uno spazio X al suo iperspazio $\mathrm{C}L\,(X)$ (seguendo la notazione più recente), dotato della topologia di Vietoris oppure della topologia localmente finita.

L'articolo "A splitting property of the upper bounded-Hausdorff convergence" (Set-Valued Analysis, vol. **2**, 1994, pag. 135–139) individua una proprietà che caratterizza — nell'iperspazio di uno spazio metrico (X, d) — i net convergenti rispetto alla topologia bounded-Hausdorff superiore ($\mathbf{bH}^+$). Tale proprietà permette di visualizzare la $\mathbf{bH}^+$-convergenza di un net $(A_j)_{j\in J}$ ad un insieme A tramite la "saldatura" di due net distinti (ma non necessariamente disgiunti), di cui uno convergente ad A rispetto alla topologia $\mathbf{H}^+$ (= topologia di Hausdorff superiore) e l'altro tendente all'infinito.

Gli articoli "On the infimum of the Hausdorff metric topologies" (C. Costantini, P. Vitolo: Proceedings of the London Mathematical Society, vol. **70**, 1995, pag. 441–480) e "Infima of hyperspace topologies" (C. Costantini, S. Levi, J. Pelant: Mathematika, vol. **42**, 1995, pag. 67–86) affrontano lo studio degli estremi inferiori, rispettivamente, delle topologie (metriche) di Hausdorff e delle topologie di Wijsman, sull'iperspazio di uno spazio metrizzabile X. Tale estremo inferiore viene eseguito in rapporto a tutte le topologie — di Hausdorff o di Wijsman — generate da metriche compatibili sullo spazio base, e permette di ottenere una topologia sull'iperspazio che dipende unicamente dalla struttura topologica (e non da quella metrica) dello spazio base in questione. Il caso delle topologie di Wijsman si dimostra in un certo senso più semplice da trattare, e perviene ad un risultato generale di facile formulazione: dato uno spazio metrizzabile X, l'estremo inferiore di tutte le topologie di Wijsman su $\mathrm{C}L\,(X)$, relative a metriche compatibili su X, è la topologizzazione della convergenza di Kuratowski (Corollario 3.5(ii) del secondo degli articoli citati). Riguardo alle topologie di Hausdorff, viene invece introdotta una nuova topologia $\mathbf{U}$ (vedi, nel primo degli articoli citati, definizioni prima della Proposizione 0.1), la cui *sequenzializzazione* $^\sharp\mathbf{U}$ risulta coincidere in alcuni casi con l'estremo inferiore delle topologie di Hausdorff. Fra i casi in questione vi è quello in cui lo spazio base X sia localmente compatto, e tale che $\Xi(X) = \aleph_0$, dove Ξ è una funzione cardinale opportunamente introdotta (vedi definizione dopo la Proposizione 5.4); inoltre, l'ipotesi che X sia localmente compatto, e che $\Xi(X)$ sia perlomeno $< 2^{\aleph_0}$, sono necessarie (vedi Teorema 5.5). Lo schema riportato in fondo al §6 riassume alcuni dei principali risultati ottenuti, e le questioni ancora aperte.

L'articolo "Every Wijsman topology relative to a Polish space is Polish" (Proceedings of the American Mathematical Society, vol. **123**, 1995, pag. 2569–2574) affronta il problema della completezza degli iperspazi, il cui interesse è legato principalmente alle possibili applicazioni alle misure di probabilità e alle selezioni di multifunzioni. In particolare, si dimostra che ogni Wijsman-iperspazio di uno spazio separabile e completamente metrizzabile è a sua volta separabile e completamente metrizzabile, generalizzando così un precedente risultato di G. Beer.

Per il ruolo centrale che la questione della completezza riveste nel contesto sopra descritto (a tale proposito, vedi ad esempio [16, considerazioni dopo il Teorema 12.6], e [15, Remark 5.1 e Teorema 5.2]), il precedente risultato ha dato origine ad un successivo filone di ricerca volto a studiare (su un iperspazio dotato della topologia di Wijsman, o anche di Vietoris) proprietà analoghe alla completezza, in particolare la proprietà di Baire e la sua versione ereditaria (rispetto a sottinsiemi chiusi). Uno speciale contributo a questo ambito di studi è stato fornito da L. Zsilinszky (vedi [28], [29], [30], [31] e [9]).

L'articolo "On the density of the hyperspace of a metric space" (A. Barbati, C. Costantini: Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, vol. **38**, 1997, pag. 349–360) prosegue, nello stesso spirito del lavoro con il prof. Bella, lo studio delle funzioni cardinali sull'iperspazio. In questo caso, si analizza il comportamento della funzione densità (= minima cardinalità di un sottinsieme denso) sull'iperspazio di uno spazio metrico, dotato della topologia di Hausdorff o della topologia localmente finita; tale analisi conduce inoltre ad introdurre due generalizzazioni del concetto di spazio metrico totalmente limitato e compatto, di cui vengono studiate alcune proprietà fondamentali. In base a tali nuove definizioni, uno spazio metrico (X, d) viene detto GTB (= "totally bounded in the generalized sense") se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un ricoprimento dello spazio, di cardinalità minore della densità di X, costituito di palle aperte di raggio ε; e viene detto GK (= "compact in the generalized sense") se ogni ricoprimento aperto possiede un sottoricoprimento di cardinalità minore della densità di X. Lo studio di tali concetti, soprattutto in relazione a noti risultati validi nel caso classico, viene successivamente ampliato e approfondito nell'articolo "On a generalization of totally bounded and compact metric spaces" (A. Barbati, C. Costantini: Topology Proceedings, vol. **22**, 1997, pag. 1–22).

Il primo dei due precedenti articoli è citato nel già menzionato survey [15] (vedi Teoremi 2.21 e 2.22, e considerazioni precedenti e successive).

L'articolo "Decomposition of topologies on lattices and hyperspaces" (C. Costantini, P.

Vitolo: Dissertationes Mathematicae, vol. **381**, 1999, pag. 1–48) affronta e generalizza, in un ambito astratto di teoria dei reticoli e teoria degli insiemi parzialmente ordinati, una delle caratteristiche ricorrenti delle topologie degli iperspazi, vale a dire il fatto di poter essere ottenute come estremo superiore di una topologia "superiore" e di una topologia "inferiore" (vedi le relative definizioni nel §1 dell'articolo, dopo la Definizione 1.1); tale proprietà viene detta appunto *decomponibilità*. Questo tipo di approccio mette in risalto le strette connessioni della teoria degli iperspazi sia con la topologia generale, sia con diversi altri settori della matematica, come dimostra anche la varietà delle tecniche utilizzate nell'articolo (studio di tipo algebrico-combinatorio di particolari reticoli — vedi Proposizione 6.2 ed Esempio 6.3 —; introduzione di *coordinate virtuali* in $\mathbf{R}^2$ — vedi Lemma 6.10 ed Esempio 6.11 —; studio di reticoli di funzioni continue, tramite il lemma di Urysohn — vedi Esempio 6.4 —; ecc.).

Una dei temi principali dell'articolo è quello dell'unicità della decomposizione, in particolare per quanto riguarda alcune delle più note topologie sugli iperspazi. Ad esempio, il problema di stabilire se esiste — almeno per qualche spazio topologico X — una topologia inferiore μ sull'iperspazio di X, tale che $\mu \neq \mathbf{V}^-$ e $\mathbf{V}^+ \vee \mu = \mathbf{V}^+ \vee \mathbf{V}^- = \mathbf{V}$ (dove $\mathbf{V}^+$, $\mathbf{V}^-$ e $\mathbf{V}$ indicano, rispettivamente, la topologia di Vietoris superiore, inferiore e globale) è rimasto a lungo una questione aperta fra gli esperti del settore. Nell'articolo viene ottenuto un risultato generale valido per topologie definite su un insieme parzialmente ordinato S (Teorema 8.4). Applicando tale risultato al caso in cui S sia l'iperspazio di uno spazio topologico X, otteniamo la non unicità della decomposizione per le topologie di Vietoris, Hausdorff, Wijsman e per la topologia localmente finita, nel caso in cui lo spazio base sia T_2 ed abbia almeno due punti; si ottiene inoltre l'unicità della decomposizione anche per la topologia di Fell, nel caso in cui lo spazio base possieda almeno un aperto non vuoto a chiusura compatta (tali risultati risultano dalla combinazione della Proposizione 14.1 e del Teorema 14.2). Nel caso invece in cui X sia regolare e tale che ogni compatto abbia parte interna vuota, la topologia di Fell risulta essere unicamente decomponibile (Proposizione 14.6); alla luce dei risultati precedenti, possiamo considerare questa situazione piuttosto eccezionale.

Il teorema generale 8.4 si applica infine ad un altro caso molto naturale (non legato alla teoria degli iperspazi), ossia il prodotto di una famiglia di insiemi totalmente ordinati, dotato dell'ordine parziale componente per componente, e della topologia prodotto delle singole topologie dell'ordine (Proposizione 8.8). Il risultato di non unicità della decomposizione così ottenuto vale anche, ad esempio, per gli spazi $\mathbf{R}^n$ dotati della topologia euclidea.

L'articolo "On the dissonance of some metrizable spaces" (C. Costantini, S. Watson: Topology and its Applications, vol. **84**, 1998, pag. 259–268) affronta uno dei temi classici della teoria degli iperspazi, vale a dire quello di fornire delle condizioni sullo spazio base affinché due determinate ipertopologie coincidano (o differiscano). In questo caso, il risultato ottenuto è stato quello di individuare una vasta classe di spazi metrizzabili e separabili (tra i quali rientra anche la retta razionale), sul cui iperspazio la topologizzazione della convergenza superiore di Kuratowski *non* coincide con la topologia cocompatta (proprietà esprimibile dicendo che lo spazio base è *dissonante*).

L'articolo in questione è citato nel già menzionato survey [15] (vedi osservazioni precedenti e successive al Teorema 3.7).

Gli articoli "Existence of selections and disconnectedness properties for the hyperspace of an ultrametric space" (D. Bertacchi, C. Costantini: Topology and its Applications, vol. **88** (3), 1998, pag. 179–197) e "Recognizing special metrics by topological properties of the 'metric'-proximal hyperspace" (C. Costantini, V. Gutev: Tsukuba Journal of Mathematics, vol. **26**(1), 2002, pag. 145–169) affrontano il problema dell'esistenza di selezioni continue, dall'iperspazio di uno spazio ultrametrico — dotato della topologia di Wijsman, della topologia "Ball", o della topologia d-proximal — allo spazio base stesso (ricordiamo che $\varphi\colon \mathrm{C}L\,(X) \to X$ viene detta una selezione se $\varphi(C) \in C$ per ogni $C \in \mathrm{C}L\,(X)$). Oltre a fornire delle caratterizzazioni in tal senso, i due articoli mettono in risalto i legami tra esistenza di selezioni e proprietà di sconnessione dell'iperspazio, e studiano nei dettagli alcune particolari classi di spazi ultrametrici.

Entrambi gli articoli sono stati citati nel "survey article" [24], dedicato appunto al problema generale delle selezioni (vedi, ivi, considerazioni dopo il Teorema 2.6, e Teorema 2.7).

Del tema delle selezioni continue sono tornato ad occuparmi nell'articolo "Weak orderability of some spaces which admit a weak selection" (C. Costantini: Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, vol. **47**(4), 2006, pag. 609–615), in cui vengono considerate le cosiddette *selezioni deboli*, cioè selezioni—continue rispetto alla topologia di Vietoris—definite non sull'intero iperspazio di X ma unicamente sulla famiglia dei sottinsiemi (non vuoti) di X aventi al più due punti. Nel fondamentale articolo di van Mill e Wattel [27] viene dimostrato che se uno spazio compatto (T_2) X ammette una selezione debole, allora esso è *debolmente ordinabile*, cioè esiste un ordine totale $\leq$ su X tale che

la topologia dell'ordine generata da $\leq$ è meno fine (o uguale) di quella originaria di X. Sempre in [27], gli autori pongono la questione, rimasta aperta per oltre 25 anni, se il risultato summenzionato valga anche senza ipotesi di compattezza su X. Mentre da un lato gli articoli [2] e [12] mostrano come l'ipotesi di compattezza su X possa essere indebolita fino ad arrivare—per spazi completamente regolari—alla numerabile compattezza, nel mio articolo vado piuttosto nella direzione di rimpiazzare la compattezza con l'esistenza di una base numerabile. Tuttavia, il tipo di argomentazione sviluppato per arrivare al risultato finale ha richiesto l'assunzione aggiuntiva che lo spazio possieda un sottinsieme denso discreto. Nel successivo articolo [14], Gutev ha evidenziato come tale assunzione aggiuntiva possa essere eliminata, dimostrando quindi che se uno spazio 2^o-numerabile ammette una selezione debole, allora esso è debolmente ordinabile.
NOTA. In un risultato non ancora pubblicato, presentato al Congresso di Erice (menzionato più avanti) dello scorso giugno 2008, M. Hrušák ha fornito per la prima volta un esempio di spazio completamente regolare (non normale), che ammette una selezione debole ma non è debolmente ordinabile.

Collegato al problema delle selezioni, sia pure in maniera non strutturale, è anche l'articolo "Continuouos dependence of δ on ε as a selection property" (C. Costantini, U. Marconi: Mathematica Pannonica, vol. **16**(2), 2005, pag. 221–229). All'origine di tale articolo vi è un risultato messo in rilievo da diversi autori, in base al quale se f è una funzione continua tra due spazi metrici, la dipendenza di δ da ε nella formula che esprime la continuità della f può essere ottenuta come una funzione a sua volta continua da $]0, +\infty[$ a $]0, +\infty[$. In [19], Repovš e Malešič estendono il precedente risultato in un contesto molto più generale di predicati definiti su prodotti di spazi metrici (alcuni dei quali spazi di funzioni), e quindi pongono una questione relativa al concetto da essi introdotto di predicato *continuous-like*. Nell'articolo con il prof. Marconi viene fornita una dimostrazione assai più rapida e diretta del risultato principale di [19], e le tecniche così sviluppate vengono poi utilizzate per dare da un lato una risposta negativa alla summenzionata questione di Repovš e Malešič nella sua formulazione originaria, e da un altro lato per mettere invece in rilievo alcuni risultati positivi che vanno in una direzione simile alla loro congettura.

Nell'articolo "On the hyperspace of a non-separable metric space" (Proceedings of the American Mathematical Society, vol. **126**, 1998, pag. 3393–3396) vengono presentati due esempi che mettono in evidenza come il comportamento della topologia di Wijsman, sull'iperspazio di uno spazio metrico non separabile, sia radicalmente diverso da quello del caso separabile. In particolare, si dimostra che il risultato presentato nel succitato articolo "Every Wijsman topology relative to a Polish space is Polish", e il risultato di Beer che esso generalizza, non possono in nessun modo essere estesi al caso non separabile.

L'articolo è citato nel già menzionato survey [15] (vedi Remark 5.6 e considerazioni precedenti).

L'articolo "Uniform properties and hyperspaces of metrizable spaces" (C. Costantini, P. Vitolo: Journal of Applied Analysis, vol. **5**, 1999, pag. 187–196) analizza una serie di relazioni reciproche che possono sussistere tra due metriche equivalenti definite su un insieme X, e che costituiscono progressivi indebolimenti della uniforme equivalenza. Si dimostra quindi che una di tali condizioni caratterizza la proprietà (da parte delle due metriche in questione) di generare la stessa topologia di Hausdorff inferiore.

Nell'articolo "A metric space cannot be isometric to its hyperspace" (F. van Breugel, C. Costantini, S. Watson: Topology and its Applications, vol. **137**, 2004, pag. 51–57) si dimostra che uno spazio metrico (limitato) (X, d) con più di un punto non può essere isometrico né al suo iperspazio, dotato della metrica di Hausdorff, né allo spazio delle funzioni "non-espansive" da X alla retta reale, dotato della metrica dell'estremo superiore. L'interesse di tale risultato è legato alle sue possibili applicazioni (sia pure "in negativo") all'informatica teorica; ed al fatto che la dimostrazione non si può ottenere attraverso argomentazioni di carattere puramente topologico (cioè prescindendo dalle proprietà peculiari di una isometria), in quanto esistono degli spazi metrici (compatti) che sono omeomorfi al loro iperspazio—ad esempio, lo spazio di Cantor—.

L'articolo "Compactness and local compactness in hyperspaces" (C. Costantini, S. Levi, J. Pelant: Topology and its Applications, vol. **123**, 2002, pag. 573–608) tratta la questione generale di individuare i sottinsiemi compatti e localmente compatti di un iperspazio. Dopo aver ottenuto opportune caratterizzazioni di tali proprietà per un iperspazio dotato della topologia di Vietoris o di quella di Wijsman (vedi Teoremi 2, 3, 3', 4, e 6, e Corollario 9), esse vengono utilizzate per studiare la locale compattezza dell'iperspazio di Vietoris (correggendo un enunciato errato di E. Michael del 1951 [18, Lemma 4.3.2], peraltro già rilevato da J. L. Shou nel 1984), e dell'iperspazio di Wijsman (vedi Teoremi 19 e 19', e Corollario 20). Tali risultati forniscono delle condizioni sufficienti e necessarie per la locale compattezza di un iperspazio considerato non solo nella sua globalità, ma anche localmente in ogni singolo punto; esse vengono quindi applicate nel §5 per costruire esempi di iperspazi di Wijsman i quali risultino essere localmente compatti nei punti di un certo tipo (ad esempio, quelli corrispondenti ad insiemi finiti o cofiniti), ma non in ogni punto. Dal tipo di argomentazioni utilizzate appare evidente che un'analisi "fine" di questo genere si sarebbe rivelata pressoché impraticabile senza le caratterizzazioni ottenute appunto in precedenza.

Inoltre, all'interno del §3 è contenuta anche una caratterizzazione della locale compattezza dell'iperspazio di Hausdorff (vedi Teorema 14 e Corollario 15), la quale presenta un tipo di proprietà e di tecniche abbastanza differenti da quelle utilizzate per le due precedenti topologie. I risultati ottenuti, comunque, si dimostrano a loro volta agevolmente applicabili in situazioni concrete, e permettono di mettere in risalto la sostanziale "ortogonalità" tra la locale compattezza relativa alla topologia di Wijsman e quella relativa alla topologia di Hausdorff, così com'esse risultano dall'analisi condotta nelle ultime due pagine dell'articolo.

Alcuni risultati dell'articolo sono stati citati nel già menzionato survey [15] (vedi Teoremi 6.1, 6.2, 6.4 e 6.5).

L'articolo "Paths in hyperspaces" (C. Costantini, V. Kubis: Applied General Topology, vol. **4**(2), 2003, pag. 377–390) tratta diverse questione legate alla connessione e alla connessione per archi degli iperspazi, un argomento sul quale esistono finora pochi lavori in letteratura. Due dei risultati più significativi ottenuti sono il fatto che l'iperspazio di uno spazio metrizzabile non compatto, dotato della topologia di Vietoris, non è localmente connesso (Teorema 3.5), e la connessione per archi dell'iperspazio di Wijsman di uno spazio metrico separabile X, il quale soddisfi opportune condizioni sull'esistenza di funzioni uniformemente continue dalla retta razionale (o da suoi particolari sottinsiemi) ad X stesso (vedi Teorema 5.3 e Corollario 5.4).

Riguardo al primo di tali risultati, esso diventa sicuramente più significativo se si tiene conto del fatto che l'iperspazio di Vietoris di uno spazio topologico connesso è sempre connesso [18, Teorema 4.10]; pertanto, ogni qualvolta si consideri uno spazio metrico connesso ma non compatto (ad esempo, la retta reale), il suo Vietoris iperspazio risulta essere connesso ma non localmente connesso. Questo fenomeno appare in qualche maniera singolare, dato che gli esempi abituali di spazi topologici connessi ma non localmente connessi sono in genere un po' involuti, e danno l'impressione di essere stati "congegnati ad hoc".

L'articolo "Tightness, character and related properties of hyperspace topologies" (C. Costantini, P. Vitolo e Ľ. Holá: Topology and its Applications, vol. **142**, 2004, pag. 245–292) prosegue da un lato l'analisi delle funzioni cardinali sugli iperspazi, già oggetto d'indagine in altri lavori sopra menzionati, studiando il carattere e la tightness degli iperspazi dotati della topologia di Vietoris inferiore, della topologia cocompatta e della topologia di Fell (che è l'estremo superiore delle due). Da un altro lato, vengono investigate la proprietà di Fréchet-Urysohn e la sequenzialità degli iperspazi, proprietà che risultano essere strettamente collegate alle due funzioni cardinali sopra citate, data la ben nota catena di implicazioni:

carattere numerabile ⇒ Fréchet-Urysohn ⇒ sequenzialità ⇒ tightness numerabile.

Ricordiamo a tale proposito che la tightness di uno spazio topologico X è il minimo cardinale μ tale che se un punto x è nella chiusura di un qualunque sottinsieme M di X, allora è sempre possibile trovare un sottinsieme M' di M avente cardinalità non superiore a μ, tale che x è ancora nelle chiusura di M'. Nel §5 dell'articolo l'indagine viene inoltre estesa alle proprietà di radialità e di pseudoradialità degli iperspazi, in quanto queste ultime costituiscono delle classiche generalizzazioni, rispettivamente, delle proprietà di Fréchet-Urysohn e della sequenzialità. Infine, nel §6 vengono forniti degli esempi riguardanti le funzioni cardinali introdotte sullo spazio base e utilizzate per determinare, o per trovare maggiorazioni o minorazioni, della tightness dell'iperspazio; pertanto tale ultimo paragrafo può rivestire un interesse indipendente nell'ambito della teoria delle funzioni cardinali, prescindendo dal contesto degli iperspazi.

Il quadro dei risultati ottenuti e dei problemi rimasti aperti è troppo complesso e articolato per essere riassunto qui in poche righe. L'articolo (all'epoca ancora in corso di pubblicazione) è spesso citato nel più volte ricordato survey [15] (vedi, ivi, inizio del §2.1, Teorema 2.2, Proposizione 2.6, Teorema 2.7 ed osservazioni successive, Proposizioni 2.8, 2.11 e 2.14, Teoremi 2.9, 2.15, 2.17 e 2.18, Corollari 2.12, 2.13 e 2.16, e infine osservazioni successive al Corollario 3.4).

⋆ ⋆ ⋆

Diversi altri miei lavori sono dedicati a questioni non legate specificamente alla teoria degli iperspazi, e assecondano piuttosto il mio forte interesse e la mia propensione verso la varietà delle tematiche che scaturiscono dalla topologia generale. Nell'occuparmi, di volta in volta, di un particolare argomento, sono stato attratto sia dal suo significato matematico intrinseco e dai successivi possibili sviluppi, sia—e forse in misura ancor maggiore—dalla sfida del "problema aperto", e quindi dalla necessità di elaborare una tecnica originale che permetta un approccio diverso e chiarificatore a questioni rivelatesi magari particolarmente refrattarie a metodi più standard.

L'articolo "Bases, π-bases and pseudodevelopments" (C. Costantini, A. Fedeli, J. Pelant: Topology Proceedings, vol. **19**, 1994, pag. 79–85) studia alcune estensioni dei ben noti concetti di "sviluppo" e di "sviluppo forte" (spesso utilizzati in teoremi di metrizzabilità). Vengono affrontati alcuni problemi relativi alle implicazioni reciproche delle proprietà così introdotte, e alla caratterizzazione degli spazi "sviluppabili" in questo senso generalizzato. Le tecniche utilizzate nel lavoro hanno inoltre diversi punti di contatto con quelle sviluppate nel paragrafo 2.1 della mia tesi di laurea (in particolare, con il concetto di *sviluppo di ordine 2*).

L'articolo "Extensions of functions which preserve the continuity on the the original domain" (C. Costantini, A. Marcone: Topology and its Applications, vol. **103**, 2000, pag. 131–153) affronta un argomento classico—quello dell'estensione delle funzioni continue—in un'ottica apparentemente nuova. Si tratta di stabilire delle condizioni sufficienti e necessarie affinché una funzione continua da un sottinsieme A di uno spazio topologico X ad uno spazio Y ammetta un'estensione che rimane continua su tutti i punti di A (ma non necessariamente sull'intero X). Nel caso in cui due spazi X, Y siano tali che questa proprietà vale per ogni $A \subseteq X$ ed ogni f continua da A a Y, la coppia X, Y viene chiamata *buona*; nell'articolo viene approfondito in particolare lo studio del caso in cui X e Y siano metrizzabili e separabili. Il quadro globale dei risultati si delinea seguendo il filo di un'analisi abbastanza fine, riguardante le caratteristiche topologiche dei due spazi in questione. Mentre, da un lato, per lo spazio Y appaiono determinanti proprietà legate in qualche modo alla completezza (il fatto di contenere come sottospazio la retta irrazionale, oppure di essere uno spazio ereditariamente di Baire), per quanto riguarda X i concetti cruciali che intervengono sono quelli di *Q-spazio, λ-spazio* e *σ-spazio* (si tratta, in ciascuno dei tre casi, di spazi in cui vi è una "forte presenza" di sottinsiemi G_δ, fra tutti i sottinsiemi dello spazio in questione). Lo schema presentato dopo il Corollario 5.7 sintetizza tale linea d'indagine, evidenziando i risultati raggiunti e le questioni rimaste aperte.

Le tecniche sviluppate permettono inoltre di affrontare e dare una risposta positiva ad un problema legato alla tematica classica degli spazi *C-immersi* e *C^*-immersi*, posto da A. V. Arhangel'skii nel 1996. Precisamente, si dimostra (Teorema 3.2) che dati due spazi X, Y con Y localmente compatto, dato un sottinsieme denso A di X e una qualsiasi funzione continua $f\colon A \to Y$, esiste sempre una funzione $\tilde{f}\colon X \to Y$ che estende f ed è continua localmente in ogni punto $a \in A$ (in realtà, il risultato ottenuto risponde alla questione di Arhangel'skii in maniera più generale, dato che nella formulazione originaria di quest'ultima si considerava soltanto il caso in cui Y fosse la retta reale).

Infine, nell'ultimo paragrafo dell'articolo si torna all'ottica "classica" delle estensioni di funzioni che risultino essere continue su tutti i punti dello spazio X; precisamente, definendo una coppia (X, Y) di spazi topologici come *fortemente buona* quando ogni funzione continua da un sottospazio di X a Y si estende ad una funzione continua da X a Y, si cerca di determinare quali siano gli spazi X tali che la coppia (X, Y) è fortemente buona per ogni Y appartenente ad una certa classe di spazi topologici. Il risultato principale (Teorema 7.5) afferma che uno spazio T_1 X è tale che la coppia (X, Y) è fortemente buona per ogni spazio compatto e metrizzabile Y, se e solo se X risulta essere normale ed ereditariamente estremamente sconnesso. È da notare che il precedente risultato non è più valido se si richiede che la coppia (X, Y) sia fortemente buona per ogni spazio metrizzabile (non necessariamente compatto) Y—vedi Proposizione 7.7—; al contrario, viene lasciata aperta la questione se si possa eliminare la condizione di metrizzabilità sullo spazio Y (lasciando intatta quella di compattezza).

Tale questione viene risolta nel successivo articolo: "Examples concerning extensions of continuous functions" (C. Costantini, D. Shakhmatov: Topology and its Applications, vol. **143**, pag. 189–208), in cui si dimostra che esistono uno spazio normale ed ereditariamente estremamente sconnesso X, uno spazio compatto Y (di densità $\aleph_1$), ed una funzione continua da un sottospazio di X a Y, la quale non può essere estesa ad alcuna funzione continua da X a Y (tale risultato si ottiene combinando insieme la Proposizione 1 e l'Esempio 4).

L'articolo prosegue considerando una naturale questione che si pone a questo punto, cioè se un esempio analogo al precedente si possa ottenere con l'ulteriore condizione che lo spazio X sia separabile. In questo caso, gli esempi presentati nell'articolo risultano essere soltanto consistenti. In effetti, dapprima viene descritta una costruzione (Esempio 5) che richiede l'assunzione $2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_1}$; successivamente, nel §2, viene sviluppato un tipo di forcing che permette di ottenere un modello di ZFC in cui vi è un'ampia varietà di esempi di questo tipo, nel senso che dato (nel modello) un qualsiasi spazio separabile e primo numerabile X avente cardinalità $\aleph_1$, è possibile rafforzare la sua topologia in modo da ottenere un esempio con le proprietà desiderate (vedi Corollario 8).

Infine, nell'ultimo paragrafo dell'articolo si mostra come sia possibile ottenere degli spazi non banali X (in particolare, degli X privi di punti isolati), tali che la coppia (X, Y) risulti essere fortemente buona per ogni spazio compatto (di Hausdorff) Y, senza condizioni di metrizzabilità su Y.

Gli articoli "On a problem of Nogura about the product of Fréchet-Urysohn $\langle\alpha_4\rangle$-spaces" (Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, vol. **40**, 1999, 537–549) e "An α_4, not Fréchet product of α_4 Fréchet spaces" (C. Costantini, P. Simon: Topology and its Applications, vol. **108**(1), 2000, pag. 43–52) vertono intorno ad un concetto di topologia generale—introdotto da Arhangel'skii—molto studiato a partire dagli anni ottanta, quello di *spazio* α_i $(1 \leq i \leq 4)$. Se uno spazio topologico di Fréchet-Urysohn (cioè tale che ogni qualvolta un punto è nella chiusura di un insieme M, esiste una successione di punti di M che converge a quel punto) possiede una delle proprietà α_i, allora esso si avvicina in qualche modo ad uno spazio 1^o-numerabile; e la proprietà α_4 è, fra queste, la più debole e l'unica che non si conservi per prodotti finiti. Nei due articoli si dimostra (nel primo caso, utilizzando l'assioma di Martin, e nel secondo—posteriore—senza ipotesi aggiuntive in ZFC) che il prodotto di due spazi α_4 aventi la proprietà di Fréchet-Urysohn può essere α_4 senza essere di Fréchet-Urysohn. Questo risolve un problema posto da T. Nogura nel 1985.

Entrambi gli articoli summenzionati vengono citati nel survey [25] (vedi Teorema 6.4 e successivi commenti).

I rapporti tra spazi di Fréchet-Urysohn e spazi α_4 sono anche alla base dell'articolo—successivo di alcuni anni—"Fréchet versus strongly Fréchet" (A. Bella, C. Costantini, P. Simon: Topology and its Applications, vol. **153**, 2006, pag. 1651–1657), in cui si forniscono due esempi consistenti di uno spazio di Fréchet-Urysohn completamente regolare e paracompatto, e di uno spazio di Fréchet-Urysohn T_2 e numerabilmente compatto, i quali non sono α_4. Tali esempi mostrano come, nel classico risultato in base al quale ogni spazio di Fréchet-Urysohn regolare e numerabilmente compatto è α_4, non si possa rimpiazzare (almeno in ZFC) né la numerabile compattezza con la psedocompattezza, né la regolarità con la proprietà T_2.

L'articolo "Filters and pathwise connectifications" (C. Costantini, A. Fedeli, A. Le Donne: Rendiconti dell'Istituto di Matematica dell'Università di Trieste, vol. **32**, 2000, pag.

173–187) affronta il seguente problema: dato un filtro libero di aperti p su uno spazio topologico di Hausdorff X, in quali casi lo spazio $X \cup \{p\}$ (dove il punto aggiunto p ha gli intorni determinati dagli aperti di X che appartengono a p stesso) può essere immerso come sottospazio denso in uno spazio di Hausdorff connesso per archi? Benché il tentativo di trovare una caratterizzazione generale basata sulle proprietà intrinseche del filtro p appaia piuttosto arduo, nell'articolo vengono presentati numerosi risultati parziali, relativi soprattutto ai casi particolarmente significativi in cui lo spazio X sia la retta razionale oppure la retta reale.

L'articolo "Filters, nets and cofinal types" (C. Costantini, E. Priola: Rendiconti dell'Istituto di Matematica dell'Università di Trieste, vol. **33**, 2001, pag. 1–18) studia i legami esistenti tra l'insieme dei filtri $\Im(X)$ e la classe dei net $\Gamma(X)$, definiti su uno spazio topologico (o, più in generale, su un insieme) X, con particolare riguardo all'esistenza di funzionali monotoni da $\Im(X)$ a $\Gamma(X)$ che mantengano invariato l'insieme dei relativi punti di accumulazione e dei punti limite.

L'articolo "On the resolvability of locally connected spaces" (C. Costantini: Proceedings of the American Mathematical Society, vol. **133**(6), 2004, pag. 1861–1864) s'inserisce nella vasta letteratura topologica riguardante il problema della risolvibilità. Ricordiamo che uno spazio topologico "crowded"—cioè privo di punti isolati—viene detto *risolvibile* se possiede due sottinsiemi densi e disgiunti (ovviamente, questo non può mai accadere quando vi è anche un solo punto isolato nello spazio). Benché tutti gli spazi metrici e tutti gli spazi compatti privi di punti isolati siano risolvibili, è possibile trovare esempi di spazi (crowded) paracompatti, e di gruppi topologici non discreti, i quali risultano non risolvibili.

Nell'articolo si dimostra, tramite una costruzione per induzione transfinita, che ogni spazio crowded, regolare e localmente connesso è risolvibile (più precisamente, *ω-risolvibile*). Questo fornisce una risposta positiva, nel caso regolare, ad una questione posta da Padmavally nel 1953; e contribuisce in qualche misura allo studio di quello che può forse essere considerato il problema più importante (aperto da oltre 60 anni) nella teoria degli spazi risolvibili, cioè se ogni spazio regolare connesso—che non si riduca ad un solo punto—sia risolvibile.

L'articolo è citato nel survey [22] (vedi, ivi, considerazioni dopo la Questione 1).

L'articolo "On the density of the space of continuous and uniformly continuous functions" (C. Costantini: "Topology and its Applications", vol. **153**(7), 2006, pag. 1056–

1078), studia la densità degli spazi (metrici) $C\big(X,(Y,\rho)\big)$ e $UC\big((X,d),(Y,\rho)\big)$, di tutte le funzioni continue (rispettivamente, uniformemente continue) da uno spazio metrico (X,d) ad uno spazio metrico (Y,ρ), dove tali spazi di funzioni sono dotati della metrica dell'estremo superiore:

$$\sigma(f,g) = \min\big\{\sup\{\rho(f(x),g(x)) \,|\, x \in X\}, 1\big\}.$$

La trattazione viene limitata al caso più naturale (l'unico, peraltro, che permetta di ottenere risultati eleganti ed unitari) in cui lo spazio (Y,ρ) sia connesso per archi. Utilizzando i due concetti già menzionati (e derivanti dai due articoli con A. Barbati citati sopra) di spazio metrico GTB e GK, si arriva a determinare esattamente la densità di $C\big(X,(Y,\rho)\big)$ in funzione della densità di X e Y, distinguendo da un lato il caso in cui X sia o non sia GK, e da un altro lato il caso in cui (Y,ρ) sia o non sia GTB (vedi Teorema 2.6).

Un risultato analogo vale per la densità dello spazio $UC\big((X,d),(Y,\rho)\big)$ delle funzioni uniformemente continue: stavolta, la proprietà GTB si rivela determinante non solo per quanto riguarda (Y,ρ), ma anche (X,d). Tuttavia, nel caso in cui (Y,ρ) non sia GTB, non si ottiene una determinazione esatta della densità di $UC\big((X,d),(Y,\rho)\big)$ ma soltanto una sua stima, sia pure assai stringente (vedi Teorema 3.7). Nell'ultimo paragrafo dell'articolo, un esempio piuttosto elaborato mostra che in generale non si può ridurre tale stima né ad un'uguaglianza con il valore che fornisce una minorazione, né con quello che fornisce una maggiorazione.

L'articolo "On two questions about topological (and nonstandard) extensions" (C. Costantini: Monatshefte für Mathematik, vol. **148**(3), 2006, pag. 205–216) nasce in diretto riferimento all'approccio topologico all'analisi non-standard sviluppato in [11]. Nel mio lavoro, infatti, affronto e risolvo due questioni aperte poste nell'articolo di Di Nasso e Forti, e relative alla tematica generale delle estensioni topologiche (le quali, in presenza di opportune proprietà aggiuntive, conducono al concetto cruciale di *estensione non-standard*). Precisamente, dimostro che per ogni estensione topologica non banale ${}^*X$ di un insieme X, esiste una topologia τ_{f} su ${}^*X$, strettamente più fine della *Star topology* τ_{s} (vedi [11, §3] per la relativa definizione), tale che $({}^*X,\tau_{\mathsf{f}})$ è ancora un'estensione topologica di X, con le stesse estensioni di funzioni ${}^*f$ valide per l'originario ${}^*X$; e che, assumendo l'Assioma di Martin, esiste un'estensione topologica ${}^*\mathbb{N}$ dell'insieme $\mathbb{N}$ dei naturali, la quale risulta essere T_1 ma non T_2, e tuttavia è tale che per ogni $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ esiste un'**unica** funzione continua ${}^*f\colon {}^*\mathbb{N} \to {}^*\mathbb{N}$ la quale estende f.

L'articolo "A consistent σ-compact sequential space which is not hereditarily weakly Whyburn" (C. Costantini: Topology and its Applications, vol. **154**(8), 2007, pag. 1726–1736) affronta una questione legata alla teoria degli spazi di Whyburn e debolmente di Whyburn. Ricordiamo che uno spazio X viene detto *debolmente di Whyburn* se per ogni sottinsieme non chiuso M di X, esiste un sottinsieme A di M tale che l'insieme $\overline{A} \setminus M$ consista esattamente di un punto. Questa definizione appare (in presenza dell'assioma di separazione T_2) come una naturale generalizzazione di quella di spazio sequenziale, nella quale si richiede che per ogni sottinsieme non chiuso M di X esista una successione di elementi di M che converga ad un punto non appartenente ad M. Poiché la sequenzialità non è una proprietà ereditaria, la questione se ogni spazio sequenziale debba tuttavia essere ereditariamente debolmente Whyburn appare estremamente naturale (perlomeno, per spazi regolari o completamente regolari), ed è stata posta per la prima volta da Tkachuk e Yashenko in [26, Problema 4.2]. In [20, Teorema 2.7] F. Obernel fornisce un (apparente) esempio di spazio compatto (T_2) e sequenziale, il quale non è ereditariamente debolmente Whyburn; tuttavia, la sua dimostrazione contiene un passaggio scorretto e non sanabile, e lo stesso Obersnel riconosce nel successivo articolo [21] che l'esempio da lui costruito risulta essere in effetti ereditariamente debolmente Whyburn. Sempre in [21], Obersnel costruisce un semplice esempio di spazio con le proprietà sopra descritte, che è T_2 ma non regolare, e allo stesso tempo sottolinea l'importanza di trovare un esempio per il quale invece valga la regolarità.

Nel mio articolo, costruisco consistentemente uno spazio topologico σ-compatto (quindi, anche paracompatto) e sequenziale, il quale possiede un sottospazio non debolmente di Whyburn; l'assunzione supplementare in ZFC che viene utilizzata, $\mathfrak{a} = \mathfrak{c}$, segue in particolare dall'Assioma di Martin. Lo strumento base per poter effettuare l'intera costruzione sono le famiglie *almost disjoint*; le tecniche sviluppate nel lavoro risultano quindi essere, in qualche modo, per metà topologiche e per metà di combinatoria infinita.

A questo punto, due importanti questioni che rimangono ancora aperte sono se sia possibile trovare in ZFC uno spazio con le proprietà di quello costruito nel mio articolo, e se per spazi compatti la sequenzialità possa effettivamente implicare la proprietà debole di Whyburn per ogni sottospazio (come personalmente sono portato a congetturare, sulla base di svariate considerazioni tecniche legate alla costruzione del mio esempio).

L'articolo "On some questions about pp and $\mathrm{pp}_{\mathrm{closed}}$ spaces" (C. Costantini: Topology and its Applications, vol. **154**(11), 2007, pag. 2248–2252) tratta di due generalizzazioni del concetto di paracompattezza introdotte recentemente in letteratura. Uno spazio T_1 X viene detto *pp* (= pointwise paracompact) se ogni ricoprimento aperto $\mathcal{A}$ di X ammette un sottoricoprimento $\mathcal{B}$ tale che $\emptyset \notin \mathcal{B}$, e per ogni funzione $f\colon \mathcal{B} \to X$ tale che $f(B) \in B$ per ogni $B \in \mathcal{B}$, l'insieme $\{f(B) \mid A \in \mathcal{B}\}$ risulta essere chiuso e discreto. In maniera simile, X viene detto pp_{closed} se ogni ricoprimento aperto $\mathcal{A}$ di X ammette un sottoricoprimento $\mathcal{B}$ tale che $\emptyset \notin \mathcal{B}$, e per ogni funzione F la quale associ ad ogni $B \in \mathcal{B}$ un chiuso $F(B) \subseteq B$, la collezione $\{F(B) \mid A \in \mathcal{B}\}$ risulta essere localmente finita.

Nell'articolo, risolvo tre questioni aperte poste in [13]. Precisamente, dimostro che:
— ogni spazio pp e separabile è paracompatto (tale risultato veniva ottenuto in [13] solo assumendo l'Ipotesi del Continuo);
— ogni sottospazio F_σ di uno spazio normale pp è ancora pp;
— ogni spazio normale $\mathrm{pp}_{\mathrm{closed}}$ è paracompatto.

L'articolo "On some questions about posets of topologies on a fixed set" (C. Costantini: Topology Proceedings, vol. **32**, 2008, pag. 187–225) affronta alcune questioni di carattere strutturale relative alla famiglia di tutte le topologie definite su un insieme fissato X, e soddisfacenti un determinato assioma di separazione, o qualche altra proprietà topologica (ad esempio, la locale compattezza). Questo tipo d'indagine ha una lunga tradizione in topologia generale: classicamente, una delle proprietà più studiate nei poset di topologie del tipo sopra descritto è quella della minimalità (le topologie su un insieme X si intendono ordinate rispetto alla relazione di finezza, nel senso che si pone $\sigma \leq \tau$ se σ è meno fine o uguale a τ). È ben nota, ad esempio, la caratterizzazione data da Katětov nel 1940 delle topologie, definite su insieme X, le quali risultano essere minimali nel poset (= insieme parzialmente ordinato) di tutte le topologie T_2 su X: esse sono esattamente quelle σ tali che lo spazio (X, σ) sia *H-chiuso* e *semiregolare* (per le relative definizioni, e per una citazione precisa del risultato di Kenděrov, vedi ad esempio [23, Introduzione e inizio del §1]).

Negli ultimi anni, grazie soprattutto alle ricerche di O. T. Alas, N. Carlson, M. G. Tkachenko e R. G. Wilson, un altro concetto (introdotto in letteratura già negli anni '70, con differente terminologia) che fa riferimento a proprietà strutturali di poset di topologie è stato sistematicamente studiato e approfondito: il concetto di *gap*. Una coppia (σ, τ) di topologie appartenenti ad un poset Σ forma un gap in Σ se σ è strettamente più fine di τ, e non vi è alcun elemento di Σ il quale sia strettamente compreso tra σ e τ. Tale nozione conduce ai due concetti strettamente correlati di topologia *lower* e *upper* in Σ, dove $\sigma \in \Sigma$ viene detta lower [upper] se esiste $\tau \in \Sigma$ tale che (σ, τ) $[(\tau, \sigma)]$ formi un gap in Σ. (Notare che tali nozioni di topologia lower e upper non hanno alcun legame con i concetti di topologia superiore e inferiore menzionati in precedenza, relativi a topologie definite su un iperspazio, o su un insieme parzialmente ordinato). Negli articoli [5], [1] e [10] vengono dimostrati numerosi risultati volti a caratterizzare quelle topologie che risultano essere lower o upper in un determinato poset.

Nel mio articolo, vengono affrontate alcune delle questioni aperte poste nei summenzionati lavori, fornendo delle soluzioni complete o parziali. In particolare, si dimostra che:

— una topologia T_2 pseudoradiale, e una topologia regolare numerabilmente compatta, definite su un insieme X, non possono essere lower nel poset $\Sigma_2(X)$ di tutte le topologie T_2 su X (questi due risultati forniscono una soluzione a [5, Questione 2.12 e seconda parte della Questione 2.6]);

— esiste una topologia localmente compatta τ sull'insieme $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y \geq 0\}$, strettamente più fine della topologia euclidea σ su X, tale che (σ, τ) forma un gap nel poset $\Sigma_{lc}(X)$ di tutte le topologie localmente compatte (T_2) su X, e tale che τ differisce da σ in ogni punto dell'insieme $\{(x, 0) \,|\, x \in \mathbb{R}\}$ (questo dà una risposta negativa alla questione implicita posta in [1, considerazioni prima del Lemma 3.1]);

— ogni topologia completamente regolare su un insieme X, la quale non sia minimale nel poset $\Sigma_3(X)$ di tutte le topologie regolari su X, risulta essere upper in $\Sigma_3(X)$ (questo fornisce una parziale risposta positiva a [1, Questione 2.15]);

—assumendo l'ipotesi del continuo, esiste una topologia T_2 τ sull'intervallo $I = [0, 1]$, tale che τ è strettamente più fine della topologia euclidea su I e τ non è upper nel poset di tutte le topologie T_2 su I (questo fornisce una risposta negativa consistente a [10, Questione 4,5]).

NOTA. Una topologia in ZFC con le stesse proprietà di quella del precedente esempio è stato trovata, quando il mio articolo era già terminato, da parte di Alas, Tkachenko e Wilson.

Negli articoli "Minimal *KC* spaces are compact" (A. Bella, C. Costantini: Topology and its Applications, vol. **155**, 2008, pag. 1426–1429) e "On some questions about *KC* and related spaces" (C. Baldovino e C. Costantini: in corso di pubblicazione su Topology and its Applications), l'oggetto principale di studio sono gli spazi *KC*, definiti come spazi topologici in cui ogni sottinsieme compatto (non necessariamente T_2) è chiuso. La proprietà KC è implicata dall'assioma di separazione T_2 (notoriamente, in uno spazio T_2 ogni sottinsieme compatto è chiuso), mentre a sua volta implica la proprietà T_1 (dato che ogni singoletto di un punto è banalmente compatto, e quindi in uno spazio KC esso risulta esssere chiuso). In effetti, alcuni autori considerano la proprietà KC come una sorta di assioma di separazione intermedio tra T_1 e T_2.

Nell'articolo con il prof. Bella, viene affrontata e risolta una questione posta per la prima volta da R. Larson nel 1973, cioè se ogni topologia KC su un insieme X, la quale risulti essere minimale fra tutte le topologie KC definite su X, debba essere compatta (anche in questo caso, non necessariamente T_2). Su tale questione, che evidentemente s'inquadra bene nel contesto dei poset di topologie che abbiamo descritto sopra, vi era stato un notevole risveglio d'interesse negli ultimi anni. Vari autori avevano dimostrato di volta in volta che la congettura vale in presenza di determinate assunzioni supplementari sulla topologia in questione; tuttavia il problema, nella sua formulazione più generale, viene descritto come ancora di difficile soluzione in [4, considerazioni dopo il Corollario 2.9]. Nel nostro articolo si segue un approccio progressivo, dimostrando dapprima una proprietà fortemente restrittiva che una topologia KC-minimale deve possedere (vedi Corollario 2); quindi si sviluppa un'argomentazione per assurdo in cui si fa vedere che se una topologia KC minimale non è compatta, allora (con il contributo del Corollario 2) si può costruire un'altra topologia KC sullo stesso "underlying set", la quale risulta essere strettamente meno fine di quella originaria (contraddizione).

Nell'articolo con la dott.ssa Baldovino, vengono risolte cinque questioni aperte poste negli articoli [4], [6] e [7]. Precisamente, si dimostra che:
— esiste uno spazio compatto KC in cui ogni sottinsieme aperto non vuoto è denso;
— esiste uno spazio T_2 che non può essere immerso come sottospazio in alcun spazio compatto KC;
— esiste uno spazio T_2-minimale (equivalentemente, per il risultato di Katětov sopra citato, H-chiuso e semiregolare) il quale non è un k-spazio;
— esiste uno spazio (X, σ) numerabile e KC, tale che nessuna topologia KC su X la quale sia meno fine (o uguale) di σ può essere KC-minimale (equivalentemente, compatta, per il risultato del precedente articolo);
— ogni topologia SC su un insieme X (dove la proprietà SC rappresenta un particolare indebolimento della proprietà KC), la quale è minimale nel poset delle topologie SC su

X, deve essere compatta.

$\star \qquad \star \qquad \star$

Do infine una descrizione di due miei lavori di argomento non specificamente topologico.

L'articolo "Pairwise disjoint eight-shaped curves in hybrid planes" (C. Costantini: MLQ. Mathematical Logic Quarterly, vol. **53**(6), 2007, pag. 551–557) parte da un risultato di carattere geometrico noto come folklore, cioè il fatto che nel piano reale non può esistere una famiglia di "curve a forma di 8", a due a due disgiunte, la quale abbia cardinalità più che numerabile (vedi Introduzione dell'articolo, per le definizioni rigorose). Poiché la dimostrazione di questa proprietà fa un uso essenziale della separablità della retta reale, può apparire interessante chiedersi cosa accade se al posto del piano reale si consideri il prodotto della retta reale con una *linea di Suslin*, cioè con un insieme totalmente ordinato il quale non sia separabile (rispetto alla topologia dell'ordine), ma allo stesso tempo non possieda al suo interno famiglie più che numerabili di sottinisemi aperti e non vuoti a due a due disgiunti. (Notare che l'esistenza di una linea di Suslin può essere dimostrata solo consistentemente in ZFC; per maggiori informazioni sulle linee e gli alberi di Suslin, si può consultare [17, Capitolo II, §4]).

Nell'articolo, dopo aver fornito una ragionevole generalizzazione a questo nuovo ambito del concetto di "curva a forma di 8", si dimostra che sotto l'assunzione assai naturale che la linea di Suslin considerata sia densa in sé, il risultato valido sul piano reale si estende al "piano ibrido" ottenuto appunto come prodotto della retta rale e della linea di Suslin in questione. La dimostrazione, tuttavia, è completamente diversa da quella relativa al piano reale: infatti, si introduce dapprima un opportuno ordine parziale nella famiglia di curve a forma di 8 a due a due disgiunte che si sta considerando, e che si suppone per assurdo avere cardinalità più che numerabile; quindi si isola un'opportuna sottofamiglia di curve la quale, rispetto all'ordine parziale introdotto, risulta essere un *albero di Suslin*. Come passo finale, si utilizza un risultato di combinatoria infinita, anch'esso noto come folklore (e che nell'articolo viene comunque ridimostrato per completezza), in base al quale non può esistere una funzione strettamente crescente da un albero di Suslin alla retta reale.

Nell'articolo "On a result of Aumann and Shapley about values of non-atomic games" (C. Costantini, P. Vitolo: Journal of Mathematical Analysis and Applications, vol. **344**, 2008, pag. 484–490) si analizza un risultato utilizzato da R. J. Aumann (premio Nobel per l'Economia nel 2005) e L. S. Shapley, per dimostrare l'esistenza del valore in relazione ad una certa classe di giochi con infiniti giocatori. Viene messo in evidenza come l'argomentazione fornita dagli autori per il risultato in questione [3, Proposizione 8.17] contenga un errore, e come esso non sia eliminabile senza introdurre alcune costruzoni aggiuntive decisamente più complesse di quelle da essi sviluppate nel testo. Viene quindi fornita una dimostrazione completa e corretta del suddetto risultato, confermandone così la validità.

Convegni e seminari.

Nel periodo compreso tra il 19 e il 23 agosto 1991, ho partecipato al 7$^{\text{th}}$ Prague Topological Symposium, presso l'Università di Praga. Nell'ambito di tale congresso, ho presentato un intervento riguardante i risultati raggiunti nel terzo capitolo della mia tesi di laurea, dal titolo: "Relationships between the completeness of ω_μ-metrizable spaces and a suitable notion of μ-Čech-completeness".

Dal 22 al 26 giugno 1992, ho partecipato al convegno "Set-convergence in nonlinear analysis and optimization", svoltosi presso le strutture del CIRM di Marsiglia-Luminy. Nel corso del convegno, ho potuto approfondire numerosi argomenti riguardanti sia l'aspetto analitico che quello topologico della teoria degli iperspazi e delle multifunzioni. Inoltre, ho presentato un abstract del summenzionato articolo: "A splitting property of the upper bounded-Hausdorff convergence".

Nel periodo compreso tra il 25 marzo e il 25 luglio 1993 sono stato ospite dell'Università di Praga, dove ho collaborato con il prof. Jan Pelant. Durante tale periodo ho avuto anche modo di illustrare, in una serie di seminari presso il locale Dipartimento di Matematica, uno dei risultati che sono stati successivamente inseriti nell'articolo: "On the hyperspace of a non-separable metric space". Lo stesso risultato è stato presentato in un intervento all'11^o Convegno Internazionale di Topologia di Trieste (6-11 settembre 1993).

In seguito, ho partecipato ai seguenti convegni e conferenze internazionali:

— 8$^{\text{th}}$ Prague Topological Symposium, 19–24 agosto 1996, Praga. Presentato un intervento dal titolo: "Selection properties for the hyperspace of an ultrametric space".

— XIV International Congress of Topology, 15–19 settembre 1997, Milazzo (Messina). Presentato un intervento dal titolo: "Extensions of functions which preserve the continuity on the original domain".

— 26$^{\text{th}}$ Winter School on Abstract Analysis, 31 gennaio — 7 febbraio 1998, Zahrádky

(Repubblica Ceca). Presentato un intervento dal titolo: “Filters, nets and cofinal types”.

— Convergence and Topology, 27 giugno — 2 luglio 1998, Erice (Sicilia). Presentato un intervento dal titolo: “On the product of α_4 Fréchet spaces”.

— Mathematics towards the Third Millennium, 27–29 maggio 1999, Roma.

— International Conference on Topology and its Applications, 23–27 agosto 1999, Yokohama (Giappone). Presentato un intervento dal titolo: “Filters and pathwise connectifications”.

— II Congresso Italo-Spagnolo di Topologia generale e Applicazioni, 8–11 settembre 1999, Trieste. Presentato un intervento dal titolo: “The metric-proximal hyperspace of an ultrametric space”.

— 28^{th} Winter School on Abstract Analysis, 29 gennaio — 5 febbraio 2000, Zahrádky (Repubblica Ceca). Presentato un intervento dal titolo: “Non-existence of isometries between a non-trivial metric space and its Hausdorff hyperspace”.

— Third Italian-Spanish Conference of General Topology and Applications, 21–23 giugno 2000, La Manga del Mar Menor (Spagna). Presentato un intervento dal titolo: “Compactness and local compactness in hyperspaces”.

— The First Turkish International Conference on Topology and its Applications, 2–5 agosto 2000, Istanbul. Presentato un intervento dal titolo: “Sequential compactness of the Kuratowski convergence”.

— Convegno di Topologia e Teoria della Forma, 20–22 settembre 2000, Perugia. Presentato un intervento dal titolo: “A counterexample for cardinal functions in hyperspaces”.

— Partecipazione come “invited speaker” al 2000 Annual Spring Topology and Dynamics Conference, 16–19 marzo 2000, San Antonio (Texas, USA). Il mio intervento ha avuto come titolo: “Fréchet property, sequentiality and related cardinal functions in hyperspaces”.

— Partecipazione come “invited speaker” al Fourth Italian-Spanish Conference on General Topology and its Applications, 27–30 giugno 2001, Bressanone. Il mio intervento ha avuto come titolo: “Pairwise disjoint segments in the real plane”.

— 9^{th} Prague Topological Symposium, 19–25 agosto 2001, Praga. Presentato un intervento dal titolo: “Consistent examples about extensions of continuous functions”.

— Logic Colloquium 2004, 25–31 luglio 2004, Torino.

— XII Meating on Real Analysis and Measure Theory (Cartemi 2006), 3–7 luglio 2006, Hotel Continental Terme, Ischia. Presentato un intervento dal titolo: “Pairwise disjoint eight-shaped curves in hybrid planes”.

— 10^{th} Prague Topological Symposium (Toposym 2006), 13–19 agosto 2006, Praga. Presentato un intervento dal titolo: "A paracompact sequential space under MA which is not hereditarily weakly Whyburn".

— Advances in Set-Theoretic Topology, 9–19 giugno 2008, Erice (Sicilia). Presentato un intervento dal titolo: "H-closed spaces which are finite-to-one continuous images of minimal-Hausdorff spaces".

— Partecipazione come "invited speaker" al XXIII Annual Summer Conference on Topology and its Applications, 29 luglio–1 agosto 2008, Città del Messico. La mia "plenary lecture" ha avuto come titolo: "54A10. Several topologies on one set".

Riferimenti bibliografici

[1] O. T. Alas, S. Hernandez, M. Sanchis, M. G. Tkachenko e R. G. Wilson. Adjacency in subposets of the lattice of T_1-topologies on a set. Acta Mathematica Ungarica, 112(3): 199–219, 2006.

[2] G. Artico, U. Marconi, J. Pelant, L. Rotter e M. Tkachenko. Selections and suborderability. *Fundamenta Mathematicae*, 175: 1–33, 2002.

[3] R. J. Aumann e L. S. Shapley *Values of Non-atomic Games. A Rand Corporation Research Study.* Princeton University Press, Princeton, N.J., 1974.

[4] O. T. Alas, M. G. Tkachenko, V. V. Tkachuk e R. G. Wilson. The FDS-property and spaces in which compact sets are closed. *Scientiae Mathematicae Japonicae*, 61(3): 473–480, 2005.

[5] O. T. Alas e R. G. Wilson. Which topologies can have immediate successors in the lattice of T_1-topologies? Applied General Topology, 5(2): 231–242, 2004.

[6] O. T. Alas e R. G. Wilson. Spaces in which compact subsets are closed and the lattice of T_1-topologies on a set. *Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae*, 43(4): 641–652, 2002.

[7] O. T. Alas e R. G. Wilson. Minimal properties between T_1 and T_2. *Houston Journal of Mathematics*, 32(2): 493–504, 2006.

[8] G. Beer. *Topologies on Closed and Closed Convex Sets.* Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1993.

[9] A. Bouziad, Ľ. Holá e L. Zsilinszky. On hereditary Baireness of the Vietoris topology. *Topology and its Applications*, 115(3): 247–258, 2001.

[10] N. Carlson. Lower and upper topologies in the Hausdorff partial order on a fixed set. Topology and its Applications, 154(3): 619–624, 2007.

[11] M. Di Nasso e M. Forti. Topological and nonstandard extensions. *Monatshefte für Mathematik*, 144(2): 89–112, 2005.

[12] S. García-Ferreira e M. Sanchis. Weak selections and pseudocompactness. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 132: 1823–1825, 2004.

[13] P. Gartside, D. Gauld e A. Mohamad. Spaces with property pp. *Topology and its Applications*, 153(15): 3029–3037, 2006.

[14] V. Gutev Weak orderability of second countable spaces. *Fundamenta Mathematicae*, 196(3): 275–287, 2007.

[15] Ľ. Holá e J. Pelant. Recent progress in hyperspace topologies. In M. Hušek e J. van Mill, editors, *Recent Progress in General Topology II*, pag. 253–285. North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 2002.

[16] A. S. Kechris. *Classical Descriptive Set Theory.* Springer-Verlag, New York, 1995.

[17] K. Kunen. *Set theory. An introduction to independence proofs.* North-Holland Publishing Company, Amsterdam-New York, 1980.

[18] E. Michael. Topologies on spaces of subsets. *Transactions of the American Mathematical Society*, 71: 152–182, 1951.

[19] J. Malešič e D. Repovš. Continuity-like properties and continuous selections. *Acta Mathematica Hungarica*, 73: 141–154, 1996.

[20] F. Obersnel. Some notes on weakly Whyburn spaces. *Topology and its Applications*, 128: 257–262, 2003.

[21] F. Obersnel. Corrigendum to "Some notes on weakly Whyburn spaces" [Topology Appl. 128 (2003) 257–262]. *Topology and its Applications*, 138: 323–324, 2004.

[22] O. Pavlov. Problems on (ir)resolvability. In E. Pearl, editor, *Open Problems in Topology II*, pag. 51–59. Elsevier, Amsterdam, 2007.

[23] J.R. Porter e R.M. Stephenson, Jr. Minimal Hausdorff Spaces — Then and Now. In C.E. Aull e R. Lowen, editors, *Handbook of the History of General Topology. Volume 2,* pag. 669–687. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1998.

[24] D. Repovš e P. V. Semenov. Continuous selections of multivalued mappings. In M. Hušek e J. van Mill, editors, *Recent Progress in General Topology II*, pag. 423–461. North-Holland, Amsterdam, 2002.

[25] D. Shakhmatov. Covergence in the presence of algebraic structure. In M. Hušek e J. van Mill, editors, *Recent Progress in General Topology II*, pag. 463–484. North-Holland, Amsterdam, 2002.

[26] V. V. Tkachuk e I. V. Yashenko. Almost closed sets and topologies they determine. *Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae*, 42(2): 393–403, 2001.

[27] J. van Mill e E. Wattel. Selections and orderability. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 83: 601–605, 1981.

[28] L. Zsilinszky. Baire spaces and hyperspace topologies.. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 124(8): 2575–2584, 1996.

[29] L. Zsilinszky. Polishness of the Wijsman topology revisited. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 126(12): 3763–3765, 1998.

[30] L. Zsilinszky. Topological games and hyperspace topologies. *Set-Valued Analysis*, 6(2): 187–207, 1998.

[31] L. Zsilinszky. Baire spaces and weak topologies generated by gap and excess functionals. *Mathematica Slovaca*, 49(3): 357–366, 1999.

PUBBLICAZIONI SCIENTIFICHE DI CAMILLO COSTANTINI

1) BELLA ANGELO, COSTANTINI CAMILLO. On the Novak number of a hyperspace. *Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae*, vol. 33, 1992, pp. 695-698.

2) COSTANTINI CAMILLO, LEVI SANDRO, ZIEMIŃSKA JOLANTA. Metrics that generate the same hyperspace convergence. *Set-Valued Analysis*, vol. 1, 1993, pp. 141-157.

3) COSTANTINI CAMILLO, FEDELI ALESSANDRO, PELANT JAN. Bases, π-bases and quasi-developments. *Topology Proceedings*, vol. 19, 1994, pp. 79-85.

4) COSTANTINI CAMILLO. A splitting property of the upper bounded-Hausdorff convergence. *Set-Valued Analysis*, vol. 2, 1994, pp. 135-139.

5) COSTANTINI CAMILLO, LEVI SANDRO, PELANT JAN. Infima of hyperspace topologies. *Mathematika*, vol. 42, 1995, pp. 67-86.

6) COSTANTINI CAMILLO, VITOLO PAOLO. On the infimum of the Hausdorff metric topologies. *Proceedings of the London Mathematical Society*, vol. 70, 1995, pp. 441-480.

7) COSTANTINI CAMILLO. Every Wijsman topology relative to a Polish space is Polish. *Proceedings of the American Mathematical Society*, vol. 123, 1995, pp. 2569-2574.

8) BARBATI ALBERTO, COSTANTINI CAMILLO. On the density of the hyperspace of a metric space. *Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae*, vol. 38, 1997, pp. 349-360.

9) BARBATI ALBERTO, COSTANTINI CAMILLO. On a generalization of totally bounded and compact metric spaces. *Topology Proceedings*, vol. 22, 1997, pp. 1-22.

10) BERTACCHI DANIELA, COSTANTINI CAMILLO. Existence of selections and disconnectedness properties for the hyperspace of an ultrametric space. *Topology and its Applications*, vol. 88, 1998, pp. 179-197.

11) COSTANTINI CAMILLO. On the hyperspace of a non-separable metric space. *Proceedings of the American Mathematical Society*, vol. 126, 1998, pp. 3393-3396.

12) COSTANTINI CAMILLO, WATSON STEPHEN. On the dissonance of some metrizable spaces, *Topology and its Applications*, vol. 84, 1998, pp. 259-268.

13) COSTANTINI CAMILLO. On a problem of Nogura about the product of Fréchet-Urysohn $\langle\alpha_4\rangle$-spaces. *Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae*, vol. 40, 1999, pp. 537-549.

14) COSTANTINI CAMILLO, VITOLO PAOLO. Decomposition of topologies on lattices and hyperspaces. *Dissertationes Mathematicae*, vol. 381, 1999, pp. 1-48.

15) COSTANTINI CAMILLO, VITOLO PAOLO. Uniform properties and hyperspaces of metrizable spaces. *Journal of Applied Analysis*, vol. 5, 1999, pp. 187-196.

16) COSTANTINI CAMILLO, FEDELI ALESSANDRO, LE DONNE ATTILIO. Filters and pathwise connectifications. *Rendiconti dell'Istituto di Matematica dell'Università di Trieste*, vol. 32, 2000, pp. 173-187.

17) COSTANTINI CAMILLO, MARCONE ALBERTO. Extensions of functions which preserve the continuity on the original domain. *Topology and its Applications*, vol. 103, 2000, pp. 131-153.

18) COSTANTINI CAMILLO, SIMON PETR. An α_4, not Fréchet product of α_4 Fréchet spaces. *Topology and its Applications*, vol. 108, 2000, pp. 43-52.

19) COSTANTINI CAMILLO, PRIOLA ENRICO. Filters, nets and cofinal types. *Rendiconti dell'Istituto di Matematica dell'Università di Trieste*, vol. 33, 2001, pp. 1-18.

20) COSTANTINI CAMILLO, GUTEV VALENTIN. Recognizing special metrics by topological properties of the"metric"-proximal hyperspace. *Tsukuba Journal of Mathematics*, vol. 26, 2002, pp. 145-169.

21) COSTANTINI CAMILLO, LEVI SANDRO, PELANT JAN. Compactness and local compactness in hyperspaces. *Topology and its Applications*, vol. 123, 2002, pp. 573-608.

22) COSTANTINI CAMILLO, KUBIS WIESLAW. Paths in hyperspaces. *Applied General Topology*, vol. 4, 2003, pp. 377-390.

23) VAN BREUGEL FRANCK, COSTANTINI CAMILLO, WATSON STEPHEN. Isometries between a metric space and its hyperspace, function space, and space of measures. *Topology and its Applications*, vol. 137, 2004, pp. 51-57.

24) COSTANTINI CAMILLO, HOLA LUBICA, VITOLO PAOLO. Tightness, character and related properties of hyperspace topologies. *Topology and its Applications*, vol. 142,

2004, pp. 245-292.

25) COSTANTINI CAMILLO, SHAKHMATOV DMITRI. Examples concerning extensions of continuous functions. *Topology and its Applications*, vol. 143, 2004, pp. 189-208.

26) COSTANTINI CAMILLO. On the resolvability of locally connected spaces. *Proceedings of the American Mathematical Society*, vol. 133 (6), 2005, pp. 1861-1864.

27) COSTANTINI CAMILLO, MARCONI UMBERTO. Continuous dependence of δ on ϵ as a selection property. *Mathematica Pannonica*, vol. 16 (2), 2005, pp. 221-229.

28) COSTANTINI CAMILLO. On the density of the space of continuous and uniformly continuous functions. *Topology and its Applications*, vol. 153 (7), 2006, pp. 1056-1078.

29) BELLA ANGELO, COSTANTINI CAMILLO, SIMON PETR. Fréchet versus strongly Fréchet. *Topology and its Applications*, vol. 153 (11), 2006, pp. 1651-1657.

30) COSTANTINI CAMILLO. On two questions about topological (and nonstandard) extensions. *Monatshefte für Mathematik*, vol. 148 (3), 2006, pp. 205-216.

31) COSTANTINI CAMILLO. Weak orderability of some spaces which admit a weak selection. *Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae*, vol. 47 (4), 2006, pp. 609-615.

32) COSTANTINI CAMILLO. A consistent σ-compact sequential space which is not hereditarily weakly Whyburn. *Topology and its Applications*, vol. 154 (7), 2007, pp. 1726-1736.

33) COSTANTINI CAMILLO. On some questions about pp and $\mathrm{pp}_{\mathrm{closed}}$-closed spaces. *Topology and its Applications*, vol. 154 (11), 2007, pp. 2248-2252.

34) COSTANTINI CAMILLO. Pairwise disjoint eight-shaped curves in hybrid planes. *Mathematical Logic Quarterly*, vol. 53 (6), 2007, pp. 551-557.

35) COSTANTINI CAMILLO, VITOLO PAOLO. On a result of Aumann and Shapley about values of non-atomic games. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 344 (1), 2008, pp. 484–490.

36) COSTANTINI CAMILLO. On some questions about posets of topologies on a fixed set. *Topology Proceedings*, vol. 32, 2008, pp. 187-225.

37) BELLA ANGELO, COSTANTINI CAMILLO. Minimal KC spaces are compact. *Topology and its Applications*, vol. 155 (13), 2008, pp. 1426-1429.

38) BASILE ACHILLE, COSTANTINI CAMILLO, VITOLO PAOLO. On the Aumann-Shapley value. *Positivity*, vol. 12 (4), 2008, pp. 613–629.

39) BALDOVINO CHIARA, COSTANTINI CAMILLO. On some questions about KC and related spaces. *Topology and its Applications*, in corso di pubblicazione.

40) BELLA ANGELO, COSTANTINI CAMILLO, SPADARO SANTINO. The Whyburn property in the class of P-spaces. *Houston Journal of Mathematics*, in corso di pubblicazione.

41) BEER GERALD, COSTANTINI CAMILLO, LEVI SANDRO. When is bornological convergence topological? *Quaderni del Dipartimento di Matematica dell'Università di Torino*, n. 14/ 2008.