Duration

Portafoglio e cash flows (continua)

Un portafoglio può essere definito mediante un vettore $\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_m \end{bmatrix}$ nel quale la generica componente x_s rappresenta la quantità investita nell'attività *s-esima*, per *s=1,2,…,m*

! E' comodo per i calcoli successivi che l'unità di valuta sia la stessa ma non è obbligatorio

Portafoglio e cash flows (segue)

Data una matrice di dimensioni $n \times m$ le cui colonne $\in \Re^n$ contengono I cash flows derivanti da un'unità investita nelle singole attività, con n numero degli istanti nei quali hanno luogo i cash flows:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2m} \\ & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nm} \end{bmatrix}$$

I cash flows prodotti dal portafoglio $\underline{x}$ sono semplicemente i flussi del vettore $\underline{y} = A\underline{x}$. $\underline{x} \in \Re^m$, $\underline{y} \in \Re^n$.

Portafoglio e cash flows, esempio (continua)

Dati i due titoli con cedole annue e durata 3 anni così caratterizzati:

- titolo 1: prezzo 95, cedola 5, valor nominale e di rimborso 100

- titolo 2: prezzo 103, cedola 8, valor nominale e di rimborso 100

La matrice A risulta:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{5}{95} & \frac{8}{103} \\ \frac{5}{95} & \frac{8}{103} \\ \frac{105}{95} & \frac{108}{103} \end{bmatrix}$$

Portafoglio e cash flows, esempio (segue)

Il portafoglio da analizzare sia il vettore $\underline{x} = \begin{bmatrix} 200 \\ 300 \end{bmatrix}$

Il vettore che contiene i cash flows originati dal portafoglio e che viene identificato con il portafoglio medesimo, un po' impropriamente, è dato da:

$$\underline{y} = A\underline{x} = \begin{bmatrix} 200\times\frac{5}{95}+300\times\frac{8}{103} \\ 200\times\frac{5}{95}+300\times\frac{8}{103} \\ 200\times\frac{105}{95}+300\times\frac{108}{103} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 33.83 \\ 33.83 \\ 535.62 \end{bmatrix}$$

Portafoglio e cash flows, esempio (segue)

Il nome *portafoglio* denota spesso *i cash flows* $\{(a_s,t_s)\}_{s=1,2,\ldots,n}$ prodotti agli istanti t_s dalle *m* attività in portafoglio.

!

In numerosi contesti applicativi il portafoglio viene definito in forma normalizzata, ossia con la somma delle componenti pari ad uno, nel qual caso ogni componente rappresenta la percentuale investita nel singolo titolo.

Altre volte la quantità investita nel singolo titolo viene indicata a valor nominale, ma in questo caso i calcoli risultano più complessi.

Par.7.1

Valore di un portafoglio (continua)

Il valore di un portafoglio all'istante z, calcolato al tasso di interesse composto *i* – in presenza di una struttura piatta dei tassi di interesse di mercato, è dato da:

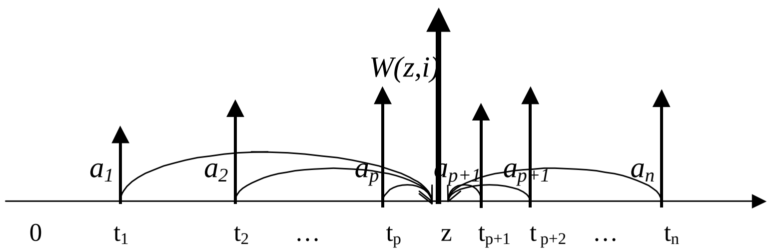
$$W(z,i) = \underbrace{\sum_{s=1}^{n} a_s (1+i)^{z-t_s}}_{forma\ 1} = \underbrace{(1+i)^z W(0,i)}_{forma\ 2}$$

Valore di un portafoglio (segue)

Supponendo:

$t_1 < t_2 < \dots < t_p < z < t_{p+1} < \dots < t_n$

il valore del portafoglio si può scomporre nel montante dei flussi di cassa che precedono *z* e nel valore attuale dei flussi che seguono *z*:



…

Valore di un portafoglio (segue)

…ossia in formule:

$$W(z,i)=\sum_{s=1}^{p} a_s (1+i)^{z-t_s} + \sum_{s=p+1}^{n} a_s (1+i)^{z-t_s} = M(z,i)+P(z,i)$$

! L'ipotesi sottostante è che tutti i primi ***p*** flussi di cassa siano reimpiegati a tasso ***i*** fino all'istante ***z*** e in ***z*** i restanti ***n-p*** flussi siano venduti a tasso ***i***.

Choc sulla struttura dei tassi di interesse, esempio (continua)

Dato il portafoglio: {(300,1),(400,2)(1200,4)}

Calcolarne il valore W(2.5,10%) all'istante z=2.5 al tasso i_0=10%.

Choc sulla struttura dei tassi di interesse, esempio
(segue)

$$M(2.5,10\%) = 300(1+10\%)^{2.5-1} + 400(1+10\%)^{2.5-2} =$$
$$= 300(1+10\%)^{1.5} + 400(1+10\%)^{0.5} = 765.63$$
$$P(2.5,10\%) = 1\,200(1+10\%)^{2.5-4} = 1\,200(1+10\%)^{-1.5} = 1040.14$$
$$W(2.5,10\%) = M(2.5,10\%) + P(2.5,10\%) = 1805.77$$

Choc sulla struttura dei tassi di interesse, esempio
(segue)

In caso di uno shock positivo di +1% sui tassi a quanto ammonterebbero M(2.5, i), P(2.5 , i) e W(2.5, i) ?

Viceversa a quanto ammonterebbero in caso di uno shock negativo di

–1%?

Choc sulla struttura dei tassi di interesse, esempio
(segue)

Le formule per calcolare M(2.5, i), P(2.5 , i) e W(2.5, i) sono:

$$M(2.5,i) = 300(1+i)^{2.5-1} + 400(1+i)^{2.5-2} = 300(1+i)^{1.5} + 400(1+i)^{0.5}$$
$$P(2.5,i) = 1\,200(1+i)^{2.5-4} = 1\,200(1+i)^{-1.5}$$
$$W(2.5,i) = M(2.5,i) + P(2.5,i) = 300(1+i)^{1.5} + 400(1+i)^{0.5} + 1\,200(1+i)^{-1.5}$$
$$i = 11\%, 9\%$$

Choc sulla struttura dei tassi di interesse, esempio
(segue)

Rappresentiamo in forma sintetica i calcoli precedenti nella seguente tabella:

	i	300	400	1200	M(z,i)	P(z,i)	W(z,i)
i_0	10%	346,1069	419,5235	1040,141	765,63	1040,14	1805,77
i_0+1%	11%	350,8373	421,4262	1026,117	772,26	1026,12	1798,38
i_0-1%	9%	341,398	417,6123	1054,488	759,01	1054,49	1813,50

Choc sulla struttura dei tassi di interesse, esempio (segue)

!

Lo *choc* positivo produce un aumento di *M* ed una diminuzione di *P* ed una complessiva riduzione di *W*

Lo *choc* negativo produce una diminuzione di *M* ed un aumento di *P* ed un complessivo aumento di *W*

Choc sulla struttura dei tassi di interesse, formalizzazione (continua)

Se si verifica prima di t_1, cioè prima del primo flusso, uno choc sui tassi di interesse di ampiezza Δi, le due componenti del valore *W(z,i)* del portafoglio subiscono variazioni di segno opposto, dipendenti dal segno di Δi *:*

$\Delta i > 0$ $\quad M(z,i+\Delta i) > M(z,i)$, $P(z, i+\Delta i) < P(z,i)$

$\Delta i < 0$ $\quad M(z,i+\Delta i) < M(z,i)$, $P(z, i+\Delta i) > P(z,i)$

M si dice soggetta a rischio di reimpiego, P soggetta a rischio di prezzo, W(z,i) a rischio di tasso.

Choc sulla struttura dei tassi di interesse, formalizzazione (segue)

In generale le due oscillazioni subite dalle componenti M(z,i) e P(z,i), essendo di segno opposto, si compensano, ma non completamente.

Si pone il problema di cercare un istante z* che *immunizzi* il portafoglio dal rischio di tasso, faccia in modo cioè che il valore W al più subisca una variazione trascurabile, a fronte di uno di choc sul tasso.

Immunizzazione (continua)

La variazione del valore del portafoglio in z conseguente allo choc sui tassi Δi è approssimabile mediante l'infinitesimo principale nell'intorno di i:

$$W(z,i+\Delta i)-W(z.i)=\frac{\partial W(z,i)}{\partial i}\Delta i+o(\Delta i)$$

La condizione di immunizzazione si può perciò tradurre nella condizione di annullamento dell'infinitesimo principale e, dunque, della derivata prima:

$$\left.\frac{\partial W(z,i)}{\partial i}\right|_{z=z^*}=0$$

Immunizzazione (segue)

L'equazione

$$\left.\frac{\partial W(z,i)}{\partial i}\right|_{z=z^*} = 0$$

permette di trovare la scadenza z* in corrispondenza della quale l'infinitesimo principale della variazione complessiva del valore del portafoglio in corrispondenza allo *choc* di ampiezza Δi si annulla

Espressione della funzione valore in due forme diverse ma equivalenti (continua)

La funzione valore può essere espressa in due forme apparentemente diverse, ma, in realtà, del tutto equivalenti come mostrato nell'unità didattica dedicata alle rendite in regime di interessi composti:

Forma 1:

$$W(z,i) = \sum_{s=1}^{n} a_s (1+i)^{z-t_s}$$

Forma 2:

$$W(z,i) = (1+i)^z W(0,i)$$

Calcolo di z* , forma 1(continua)

$$W(z,i)=\sum_{s=1}^{n} a_s (1+i)^{z-t_s}$$

$$\frac{\partial W(z,i)}{\partial i}=\sum_{s=1}^{n}(z-t_s)a_s(1+i)^{z-t_s-1}=$$

$$=(1+i)^{z-1}\sum_{s=1}^{n}(z-t_s)a_s(1+i)^{-t_s}=$$

$$=(1+i)^{z-1}\left[z\sum_{s=1}^{n}a_s(1+i)^{-t_s}-\sum_{s=1}^{n}t_s a_s(1+i)^{-t_s}\right]=0 \quad\Rightarrow$$

$$\boxed{z^*(i)=D(i)=\frac{\sum_{s=1}^{n}t_s a_s(1+i)^{-t_s}}{\sum_{s=1}^{n}a_s(1+i)^{-t_s}}}$$

Calcolo di z* , forma 1(segue)

z*(i) = D(i) **è la** ***media aritmetica ponderata delle*** $\boldsymbol{t_s}$ ***con pesi i valori attuali*** $\boldsymbol{a_s(1+i)^{-t_s}}$**, ossia la** ***duration*** **della rendita generata dal portafoglio.**

Calcolo di z* , forma 2

$$W(z,i) = (1+i)^z W(0,i)$$

$$\frac{\partial W(z,i)}{\partial i} = z(1+i)^{z-1} W(0,i) + (1+i)^z \frac{\partial W(0,i)}{\partial i} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{z^*(i) = D(i) = -\frac{(1+i)\frac{\partial W(0,i)}{\partial i}}{W(0,i)}}$$

Duration , forma 1 e forma 2

Le due espressioni per la duration trovate sono equivalenti

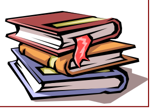
$$\boxed{z^*(i) = D(i) = \frac{\sum_{s=1}^{n} t_s a_s (1+i)^{-t_s}}{\sum_{s=1}^{n} a_s (1+i)^{-t_s}} = -\frac{(1+i)\frac{\partial W(0,i)}{\partial i}}{W(0,i)}}$$

! **La duration espressa nella forma 2 non ha un'utilità pratica immediata, nel senso che per calcolarla normalmente si ricorre alla forma 1, ma la forma 2 si presta a più immediate dimostrazioni di interessanti proprietà**

DEFINIZIONE 1:

La duration *$z^*(i) = D(i)$* di un portafoglio che dà diritto alla rendita $\{(a_s,t_s)\}_{s=1,2,\dots,n}$ è la *media aritmetica ponderata degli istanti di esigibilità t_s con pesi i valori attuali $a_s(1+i)^{-t_s}$*

$z^*(i)$ possiede la proprietà di *immunizzazione*, ossia la funzione valore *$W[z^*(i),i]$* calcolata all'istante *$z^*(i)$* subisce una variazione in corrispondenza ad uno choc *Δi* sul tasso di interesse pari ad un infinitesimo di ordine superiore a *Δi*.



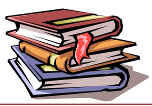
DEFINIZIONE 2:

La duration *$z^*(i) = D(i)$* di un portafoglio che dà diritto alla rendita $\{(a_s,t_s)\}_{s=1,2,\dots,n}$ è la durata di immunizzazione del portafoglio, soddisfacente l'equazione nell'incognita z:

$$\frac{\partial W(z,i)}{\partial i} = \frac{\partial\left[(1+i)^z W(0,i)\right]}{\partial i} = 0$$

e vale:

$$z^*(i) = -(1+i)\frac{\frac{\partial W(0,i)}{\partial i}}{W(0,i)} = 0$$



Calcolo della duration, esempio (continua)

Dati:

- t_0 = 29/09/03 data di valutazione, assunta come origine dei tempi
- portafoglio: {(1000,03/12/03),(1500,12/10/07)}

t_1 = 65/365 = 0.178 anni dal 29/09/03 al 03/12/03

t_2 = 1474/365 = 4.038 anni dal 29/09/03 al 12/10/07

Calcolo della duration, esempio (segue)

$$W(0,i)=\sum_{s=1}^{n} a_s (1+i)^{-t_s} = 1000\times 1.1^{-0.178} + 1500\times 1.1^{-4.0384} = 983.17 + 1020.78 = 2004$$

$$\sum_{s=1}^{n} t_s a_s (1+i)^{-t_s} = 0.178\times 1000\times 1.1^{-0.178} + 4.0384\times 1500\times 1.1^{-4.0384} = 4\,297$$

$$D(10\%)=\frac{\sum_{s=1}^{n} t_s a_s (1+i)^{-t_s}}{\sum_{s=1}^{n} a_s (1+i)^{-t_s}} = \frac{4297}{2004} = 2.144445$$

Data di immunizzazione = data di origine + D(10%)×365

$$= 29/09/03 + 2.14445\times 365 \cong \mathbf{19/11/05}$$

Par.7.2

Proprietà analitiche della duration - Calcolo di D(0), esempio

Con riferimento all'esempio precedente calcoliamo la duration in corrispondenza del tasso i=0

$$W(0,i) = 1000 \times (1+i)^{-0.178} + 1500 \times (1+i)^{-4.0384}$$

$$\sum_{s=1}^{n} t_s a_s (1+i)^{-t_s} = 0.178 \times 1000 \times (1+i)^{-0.178} + 4.0384 \times 1500 \times (1+i)^{-4.0384}$$

$$D(0) = \frac{0.178 \times 1000 + 4.0384 \times 1500}{1000 + 1500} = \bar{t} = 2.49425$$

Data corrispondente a $\bar{t}$ = data di origine + $\bar{t} \times 365$=

=29/09/03 + 2.49425 $\times$365 $\cong$ 27/03/2006

Proprietà analitiche della duration - Calcolo di D(0), formalizzazione

$$D(0) = \left. \frac{\sum_{s=1}^{n} t_s a_s (1+i)^{-t_s}}{\sum_{s=1}^{n} a_s (1+i)^{-t_s}} \right|_{i=0} = \frac{\sum_{s=1}^{n} t_s a_s}{\sum_{s=1}^{n} a_s} = \bar{t},$$

$\bar{t}$ scadenza media aritmetica

Proprietà analitiche della duration – Comportamento asintotico della duration, esempio

Con riferimento all'esempio precedente calcoliamo

$$\lim_{i\to\infty} D(i) = \lim_{i\to\infty} \frac{0.178\times 1000\times(1+i)^{-0.178} + 4.0384\times 1500\times(1+i)^{-4.0384}}{1000\times(1+i)^{-0.178} + 1500\times(1+i)^{-4.0384}} =$$

$$\lim_{i\to\infty} \frac{(1+i)^{-0.178}\left[0.178\times 1000 + 4.0384\times 1500\times(1+i)^{-4.0384+0.178}\right]}{(1+i)^{-0.178}\left[1000 + 1500\times(1+i)^{-4.0384+0.178}\right]} =$$

$$\frac{0.178\times 1000}{1000} = 0.178$$

Data corrispondente a t_1 = data di origine + 0.178×365=
=29/09/03 + 0.178 ×365 ≅ 3/12/2003

Proprietà analitiche della duration - Comportamento asintotico della duration, formalizzazione

$$\lim_{i\to\infty} D(i) = \lim_{i\to\infty} \frac{\sum_{s=1}^{n} t_s a_s (1+i)^{-t_s}}{\sum_{s=1}^{n} a_s (1+i)^{-t_s}} = \lim_{i\to\infty} \frac{(1+i)^{-t_1}\sum_{s=1}^{n} t_s a_s (1+i)^{-t_s+t_1}}{(1+i)^{-t_1}\sum_{s=1}^{n} a_s (1+i)^{-t_s+t_1}} =$$

$$\lim_{i\to\infty} \frac{\sum_{s=1}^{n} t_s a_s (1+i)^{-t_s+t_1}}{\sum_{s=1}^{n} a_s (1+i)^{-t_s+t_1}} = \frac{t_1 a_1}{a_1} = t_1$$

Proprietà analitiche della duration – Duration come funzione monotòna decrescente del tasso i (continua)

Viene fatta una dimostrazione euristica con un portafoglio con due soli flussi, al fine di snellire le notazioni viene posto:

$$a_s(1+i)^{-t_s} = p_s(i), s = 1,2$$

$$D(i) = \frac{t_1 a_1(1+i)^{-t_1} + t_2 a_2(1+i)^{-t_2}}{a_1(1+i)^{-t_1} + a_2(1+i)^{-t_2}} = \frac{t_1 p_1(i) + t_2 p_2(i)}{p_1(i) + p_2(i)} =$$

$$= \frac{t_1 p_1(i) + [t_1 + (t_2 - t_1)]p_2(i)}{p_1(i) + p_2(i)} =$$

$$= \frac{t_1[p_1(i) + p_2(i)] + (t_2 - t_1)p_2(i)}{p_1(i) + p_2(i)} = t_1 + (t_2 - t_1)\frac{p_2(i)}{p_1(i) + p_2(i)}$$

Proprietà analitiche della duration – Duration come funzione monotòna decrescente del tasso i (segue)

Supposto Δi>0, si analizza:

$$D(i+\Delta i) = \frac{t_1 p_1(i+\Delta i) + t_2 p_2(i+\Delta i)}{p_1(i+\Delta i) + p_2(i+\Delta i)} = t_1 + (t_2 - t_1)\frac{p_2(i+\Delta i)}{p_1(i+\Delta i) + p_2(i+\Delta i)}$$

! Se i aumenta p_1 e p_2 diminuiscono, la diminuzione di p_2 è però maggiore in quanto p_2 contiene il fattore di attualizzazione con durata $t_2>t_1$, il quoziente $\frac{p_2(i)}{p_1(i)+p_2(i)}$ diminuisce e con esso anche D(i)

Per una dimostrazione più rigorosa vedi le dispense

Proprietà analitiche della duration – Duration come funzione monotòna decrescente del tasso i (segue)

Pochè la funzione *D(i)* è monotona decrescente, ne consegue che per *i≥0* la *duration* è compresa fra la scadenza del primo flusso e la media aritmetica ponderata delle scadenze, che sono, rispettivamente estremo inferiore e massimo di tale funzione. In simboli: $t_1 < D(i) \leq \bar{t} \quad (i \geq 0)$

Par.7.3

Cambio della data origine per il calcolo della duration, esempio (continua)

Con riferimento all'esempio trattato in precedenza, anticipiamo di un anno la data di valutazione e di origine, portandola dal 29/09/03 al 29/09/02.

Il tasso i sia lo stesso e così pure il portafoglio, ossia: {(1000,03/12/03),(1500,12/10/07)}

Gli istanti di esigibilità dei flussi aumentano di uno:

t_1 = 65/365 +1 = 1.178 anni dal 29/09/02 al 03/12/03

t_2 = 1474/365 +1 = 5.038 anni dal 29/09/02 al 12/10/07

Quanto vale la duration D(i)?

Cambio della data origine per il calcolo della duration, esempio (segue)

$$W(0,i)=\sum_{s=1}^{n} a_s(1+i)^{-t_s} = 1000\times 1.1^{-1.178}+1500\times 1.1^{-5.0384} = 893.79+927.98=1821.77$$

$$\sum_{s=1}^{n} t_s a_s (1+i)^{-t_s} = 1.178\times 1000\times 1.1^{-1.178}+5.0384\times 1500\times 1.1^{-5.0384} =$$

$$=1052{,}96+4675.51=5\,728.47$$

$$D(10\%)=\frac{\sum_{s=1}^{n} t_s a_s (1+i)^{-t_s}}{\sum_{s=1}^{n} a_s (1+i)^{-t_s}}=\frac{5\,728.47}{1821.77}=3.144445$$

Data di immunizzazione: 29/09/02 + 3.144445×365 ≅19/11/05

! **La *duration* è aumentata esattamente di 1, ma la data di immunizzazione è rimasta la stessa**

Cambio della data origine per il calcolo della duration, formalizzazione (continua)

In generale, posto:

F={(a_s,t_s)}

F_Δ={(a_s,t_s+Δ)},

si ha:

$$z_\Delta^*(i)=\frac{\sum_{s=1}^{n}(t_s+\Delta)a_s(1+i)^{-(t_s+\Delta)}}{\sum_{s=1}^{n} a_s(1+i)^{-(t_s+\Delta)}}=\frac{\sum_{s=1}^{n} t_s a_s(1+i)^{-(t_s+\Delta)}+\Delta\sum_{s=1}^{n} a_s(1+i)^{-(t_s+\Delta)}}{\sum_{s=1}^{n} a_s(1+i)^{-(t_s+\Delta)}}$$

Cambio della data origine per il calcolo della duration, formalizzazione (segue)

Si moltiplica numeratore e denominatore per $(1+i)^{-\Delta}$ e si scompone la frazione in due addendi, ottenendo:

$$\boxed{z_\Delta^*(i)=\frac{\sum_{s=1}^{n} t_s a_s (1+i)^{-t_s}}{\sum_{s=1}^{n} a_s (1+i)^{-t_s}}+\frac{\Delta\sum_{s=1}^{n} a_s (1+i)^{-t_s}}{\sum_{s=1}^{n} a_s (1+i)^{-t_s}}=z^*(i)+\Delta}$$

Par.7.4

Proprietà di convexity, esempio (continua)

Con riferimento al solito esempio, valutiamo l'effetto di uno choc positivo pari all'1% ed uno choc negativo pari a -1% sul valore del portafoglio calcolato in D(10%)=2.144445. Ossia:

$$i=10\%$$
$$W(2.144445,10\%)=1000\times 1.1^{2.144445-0.178}+1500\times 1.1^{2.144445-4.0384}=$$
$$=1206.127+1252.268=2458.395$$
$$i=11\%$$
$$W(2.144445,11\%)=1000\times 1.11^{2.144445-0.178}+1500\times 1.11^{2.144445-4.0384}=$$
$$=1227.782+1230.987=2458.77$$
$$i=9\%$$
$$W(2.144445,9\%)=1000\times 1.09^{2.144445-0.178}+1500\times 1.09^{2.144445-4.0384}=$$
$$=1184.661+1274.116=2458.776$$

Proprietà di convexity, esempio (segue)

Lo *choc* sui tassi ha prodotto, in entrambi i casi, un pur modesto incremento del valore del portafoglio.

Essendo l'infinitesimo principale nullo, tale incremento è un infinitesimo secondario

Proprietà di convexity, formalizzazione (continua)

Sviluppo della funzione *W[z*(i0),i]* in serie di Taylor nell'intorno di i_0, arrestata al termine di *2*° ordine:

$$W[z^*(i_0), i_0+\Delta i] = W[z^*(i_0), i_0] + \frac{\partial W[z^*(i_0), i]}{\partial i}\bigg|_{i=i_0}\Delta i + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 W[z^*(i_0), i]}{\partial i^2}\bigg|_{i=i_0}\Delta i^2 + o(\Delta i^2)$$

Poiché, per la proprietà della *duration*, la derivata prima è nulla, vale l'approssimazione:

$$W[z^*(i_0), i_0+\Delta i] \approx W[z^*(i_0), i_0] + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 W[z^*(i_0), i]}{\partial i^2}\bigg|_{i=i_0}\Delta i^2$$

Proprietà di convexity, formalizzazione (segue)

Per Δi sufficientemente piccolo, la variazione della funzione $W[z^*(i_0),i]$ nell'intorno di i_0 ha lo stesso segno della derivata seconda calcolata in i_0 e perciò dimostrare la positività della variazione del valore $W[z^*(i_0),i]$ equivale a dimostrare il segno positivo della derivata seconda.

In altre parole, la funzione $W[z^*(i_0),i]$presenta un punto di minimo relativo in $i=i_0$

Proprietà di convexity, formalizzazione (segue)

$$\frac{\partial^2 W(z^*,i)}{\partial i^2} = \sum_{s=1}^{n}(z^*-t_s)(z^*-t_s-1)a_s(1+i)^{z^*-t_s-2} =$$

$$= (1+i)^{z^*-2}\sum_{s=1}^{n}(z^*-t_s)(z^*-t_s-1)a_s(1+i)^{-t_s} =$$

$$= (1+i)^{z^*-2}\left[\sum_{s=1}^{n}(z^*-t_s)^2 a_s(1+i)^{-t_s} + \underbrace{\sum_{s=1}^{n}(z^*-t_s)a_s(1+i)^{-t_s}}_{=0}\right]$$

Notazione utilizzata: $z^* = z^*(i_0)$

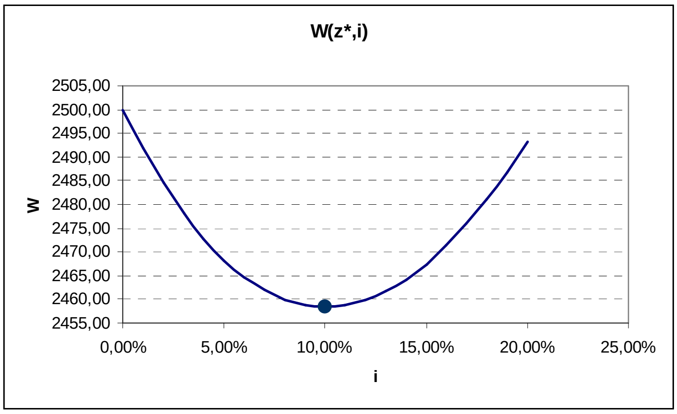
Proprietà di convexity, formalizzazione (segue)

$$\boxed{\frac{\partial^2 W(z^*,i)}{\partial i^2} = (1+i)^{z^*-2} \sum_{s=1}^{n} (t_s - z^*)^2 a_s (1+i)^{-t_s}}$$

A meno del fattore $(1+i)^{z^*-2}$, l'espressione a secondo membro è la somma ponderata dei quadrati degli scarti delle t_s dalla media z*, con pesi positivi $a_s(1+i)^{-ts}$, positiva per n>1.

Si tratta quindi di un indicatore di dispersione con però un difetto: se ad esempio moltiplicassimo tutti i flussi del portafoglio per 100 l'indicatore aumenterebbe, risulta necessario quindi dividere la derivata seconda rispetto a i per W al fine di normalizzare tutti i pesi.

Proprietà di convexity, rappresentazione grafica



Zero Coupon Bond e Duration (continua)

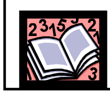
Quanto vale la duration di uno zero-coupon bond?

Evidentemente la *duration*, essendo una media di scadenze ed essendoci una sola scadenza, coincide con l'unica scadenza disponibile, diciamo t_1.

Zero Coupon Bond e Duration (segue)

Quanto vale la derivata seconda della funzione *W[z*(i₀),i]* calcolata per $i=i_0$ per uno *zero-coupon bond*?

Poiché l'unico flusso di cassa viene valutato in corrispondenza della sua scadenza, coincidente con la *duration*, la funzione $W[z^*(i_0),i]$ risulta indipendente dal tasso di interesse e quindi costante e, dunque, la derivata seconda è nulla, coerentemente con il fatto intuitivo che, con un solo flusso, la dispersione è nulla.



Par.7.4

Significato di *volatilità*

Premessa

In ambito borsistico la *volatilità* di un titolo sta ad indicare la sensibilità del prezzo del titolo alle variazioni di tasso di mercato.

La volatilità rappresenta un *moltiplicatore* che trasforma una variazione di tasso nella corrispondente variazione relativa di prezzo.

La variazione relativa di prezzo rappresenta la perdita/guadagno percentuale realizzabile grazie alla variazione di tasso

Volatilità, esempio (continua)

Esempio:

Siano dati due zero-coupon bond di durate, rispettivamente, 4 e 7 anni, aventi oggi entrambi un rendimento del 10% annuo composto , calcolare le variazioni assolute ΔP e relative $\Delta P/P$ di prezzo dei due titoli, per unità di valor nominale, a fronte di una variazione di tasso di ±1% (da 10% a 11% e da 10% a 9%.

Volatilità, esempio (segue)

ZCB 4 anni

i	P(i)	ΔP	ΔP/P
10%	0,683013		
11%	0,658731	-0,0242825	-3,5552%
9%	0,708425	0,0254118	3,7205%

7 anni

i	P(i)	ΔP	ΔP/P
10%	0,513158		
11%	0,481658	-0,0314997	-6,1384%
9%	0,547034	0,0338761	6,6015%

Il secondo ZCB risulta più *volatile* del primo.

DEFINIZIONE:

***Indice di volatilità η(i)*: limite del rapporto fra la variazione relativa di prezzo e la variazione assoluta di tasso, in una parola *semielasticità* del prezzo rispetto al tasso.**
In formule, premettendo un segno meno affinché l'indice risulti positivo (come avviene nella definizione di elasticità) e ricordando che P(i) ≡ W0,i), si ha:

$$\eta(i) = \lim_{\Delta i \to 0} -\frac{\frac{\Delta P(i)}{P(i)}}{\Delta i} = -\frac{P'(i)}{P(i)} \equiv -\frac{\frac{\partial W(0,i)}{\partial i}}{W(0,i)}$$

Indice di volatilità (continua)

Ricordando che:

$$z^*(i) = -(1+i)\frac{\frac{\partial W(0,i)}{\partial i}}{W(0,i)}$$

si ha

Duration modificata

$$\eta(i) = -\frac{\frac{\partial W(0,i)}{\partial i}}{W(0,i)} = \frac{z^*(i)}{1+i} = \frac{D(i)}{1+i}$$

Indice di volatilità (segue)

Invertendo la definizione, si può esprimere la derivata prima del prezzo rispetto al tasso in funzione del prezzo e della *duration modificata*:

$$\frac{\partial W(0,i)}{\partial i} = -\eta(i) W(0,i) = -\frac{D(i)}{1+i} W(0,i)$$

E' quindi possibile esprimere l'infinitesimo principale di una variazione di prezzo conseguente ad una variazione di tasso nella forma seguente:

$$\Delta P(i) = P(i+\Delta i) - P(i) \approx \frac{\partial W(0,i)}{\partial i}\Delta i = -\eta(i)P(i)\Delta i = -\frac{z^*(i)}{1+i}P(i)\Delta i$$

Indice di volatilità e approssimazione del prezzo, esempi (continua)

Applichiamo la formula trovata ai due ZCB dell'ultimo esempio in presenza di una variazione di tasso $\Delta i = 0.5\%$.

Si introducono le notazioni:

$P_\Delta(i) = P(i) - \eta(i) \times P(i) \times \Delta i$

$o(\Delta i) = P(i+\Delta i) - P_\Delta(i)$

$o(\Delta i)$ rappresenta l'errore che si commette con l'approssimazione

Indice di volatilità e approssimazione del prezzo, esempi (segue)

ZCB	4	anni	η(i)=	3,6364		
	i	P(i)	ΔP	- η(i)*P(i)*Δi	P_Δ (i)	o(Δi)
	10,0%	68,30135				
	10,5%	67,07349	-1,2278581	-1,241843	67,05950	0,01398
	9,5%	69,55743	1,2560838	1,241843	69,54319	0,01424

Indice di volatilità e approssimazione del prezzo, esempi (segue)

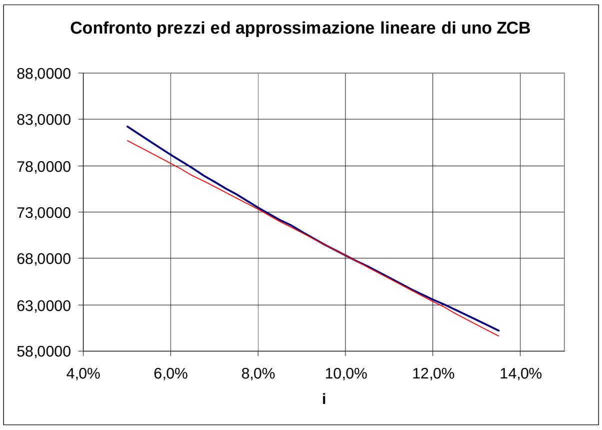
ZCB	7	anni	η(i)=	6,3636		
	i	P(i)	ΔP	-η(i)*P(i)*Δi	P_{Δ}(i)	o(Δi)
	10,0%	51,31581				
	10,5%	49,71232	-1,6034893	-1,632776	49,68304	0,02929
	9,5%	52,97868	1,6628721	1,632776	52,94859	0,03010

Indice di volatilità e approssimazione del prezzo, esempi (segue)

Tasso	10%
Durata	4
Nominale	100
Prezzo	68,30135
Volatilità	3,636364

Δi	Tassi	Prezzi	Appross. Lineare	o(Δi)
-5,0%	5,0%	82,2702	80,7198	1,5505
-4,5%	5,5%	80,7217	79,4779	1,2437
-4,0%	6,0%	79,2094	78,2361	0,9733
-3,5%	6,5%	77,7323	76,9942	0,7381
-3,0%	7,0%	76,2895	75,7524	0,5371
-2,5%	7,5%	74,8801	74,5106	0,3695
-2,0%	8,0%	73,5030	73,2687	0,2343
-1,5%	8,5%	72,1574	72,0269	0,1306
-1,0%	9,0%	70,8425	70,7850	0,0575
-0,5%	9,5%	69,5574	69,5432	0,0142
0,0%	10,0%	68,3013	68,3013	0,0000
0,5%	10,5%	67,0735	67,0595	0,0140
1,0%	11,0%	65,8731	65,8177	0,0554
1,5%	11,5%	64,6994	64,5758	0,1236
2,0%	12,0%	63,5518	63,3340	0,2178
2,5%	12,5%	62,4295	62,0921	0,3374
3,0%	13,0%	61,3319	60,8503	0,4816
3,5%	13,5%	60,2583	59,6084	0,6498

Indice di volatilità e approssimazione del prezzo, esempi (segue)



Par.7.5

Immunizzazione di un portafoglio mediante l'allineamento della duration all'orizzonte temporale.

Descrizione del problema

Dato un orizzonte di pianificazione, una durata in corrispondenza della quale vogliamo che il portafoglio di più attività finanziarie negoziabili sul mercato in quantità continue sia immunizzato rispetto al rischio di tasso, quale composizione di portafoglio permette di realizzare l'obiettivo sopra descritto, effettuando acquisti e vendite di attività senza alterare il valore complessivo del portafoglio?

Immunizzazione di un portafoglio mediante l'allineamento della duration all'orizzonte temporale,esempio (continua)

Un portafoglio del valore di **€ *1 000 000*** viene investito in due ZCB di durate residue (e duration) *2* e *5* anni in percentuali *40%* e *60%.*

La struttura dei tassi di interesse sia piatta a tasso *i = 8%.*

Immunizzazione di un portafoglio mediante l'allineamento della duration all'orizzonte temporale,esempio (segue)

Calcoliamo i valori in portafoglio V_1 e V_2 investiti nei due titoli ed i corrispondenti valori nominali N_1 e N_2:

V_1 = 40%€ 1 000 000 = € 400 000

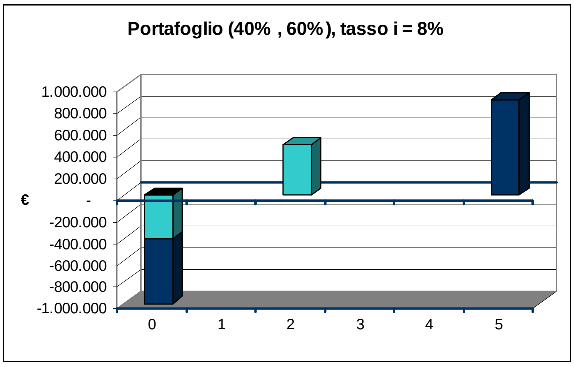
V_2 = 60%€ 1 000 000 = € 600 000

$N_1 = V_1(1+8\%)^2 =$ € 400 000×1.1664 = € 466 560

$N_2 = V_2(1+8\%)^5 =$ € 600 000×1.4693 = € 881 597

Immunizzazione di un portafoglio mediante l'allineamento della duration all'orizzonte temporale,esempio (segue)

Graficamente…



Immunizzazione di un portafoglio mediante l'allineamento della duration all'orizzonte temporale,esempio (segue)

La duration del portafoglio si può calcolare facendo riferimento ai flussi di cassa {(€ 466 560,2),(€ 881 597,5)} della rendita generata dal portafoglio:

$$D(8\%) = \frac{2 \times 466\,560 \times 1.08^{-2} + 5 \times 881\,597 \times 1.08^{-5}}{466\,560 \times 1.08^{-2} + 881\,597 \times 1.08^{-5}}$$

Poiché 466 560 = 400 000×1.08^2 e 881 597 = 600 000×1.08^5 , si ha, 466 560×1.08^{-}= 400 000 e 881 597×1.08^{-5} = 600 000, che porta a semplificare il calcolo della duration in modo banale:

$$D(8\%) = \frac{2 \times 400\,000 + 5 \times 600\,000}{400\,000 + 600\,000} = 2 \times 40\% + 5 \times 60\% = 3.80$$

Immunizzazione di un portafoglio mediante l'allineamento della duration all'orizzonte temporale,esempio (segue)

!

Alcuni dati sono risultati superflui ed altrettanto alcuni calcoli:

- il tasso di interesse della struttura dei tassi piatta è irrilevante
- è stato inutile calcolare i valori nominali
- è stato inutile calcolare i i valori monetari in portafoglio

La formula contiene solo le durate dei due ZCB e le percentuali di tali titoli presenti in portafoglio, ma facciamo notare tuttavia che questo è vero perché il tasso di mercato al quale si scontano i flussi è lo stesso che era in vigore al momento dell'acquisto degli ZCB.

Immunizzazione di un portafoglio mediante l'allineamento della duration all'orizzonte temporale,esempio (segue)

!

Se intervenisse una variazione del tasso di mercato e volessimo ricalcolare la duration del portafoglio in base al nuovo tasso, diventato, poniamo, 9%, essa varrebbe:

$$D(9\%)=\frac{2\times 466\,560\times 1.09^{-2}+5\times 881\,597\times 1.09^{-5}}{466\,560\times 1.09^{-2}+881\,597\times 1.09^{-5}}=\frac{2\times 392\,694+5\times 572\,977}{392\,694+572\,977}=$$

$$=2\frac{392\,694}{392\,694+572\,977}+5\frac{572\,977}{392\,694+572\,977}=2\times 40{,}665\%+5\times 59{,}335\%=3.78$$

Immunizzazione di un portafoglio mediante l’allineamento della duration all’orizzonte temporale,esempio **(segue)**

!

Riscontriamo che:

- il valore del portafoglio è diminuito, ma in modo non omogeneo, essendo diminuito di più lo ZCB di più lunga durata, più volatile, nel senso appena definito;

- la composizione percentuale del portafoglio è variata, anche se non si sono effettuate operazioni di acquisto o di vendita;

- la duration del portafoglio è diminuita, coerentemente col fatto che la duration è funzione decrescente del tasso.